Ecuaciones Diferenciales: Variables Separables y Aplicaciones

@toobaziti

14 de Agosto de 2025

Disclaimer: Este documento ha sido elaborado a partir de la grabación de una clase, del slide visto en clase y del texto de varios recomendados. Puede contener errores u omisiones debidos a la calidad del audio, cortes involuntarios o dificultades de transcripción. Por favor, consúltese siempre la fuente original si se requiere confirmar algún detalle.

Índice

1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) **1**
1.1. Definición y Relevancia 1
1.2. Clasificación de las EDO 1
1.3. Soluciones de las EDO: General y Particular 1

2. Método de Variables Separables **2**
2.1. Definición y Forma Característica 2
2.2. Estrategia de Resolución Paso a Paso 2
2.3. Ejemplos Resueltos 2

3. Importancia de Variables Separables en Otros Métodos **5**

4. Preparación y Recursos del Curso **5**

5. Conclusión Global **6**

1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

1.1. Definición y Relevancia

na **ecuación diferencial (ED)** es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida . Su **incógnita principal es siempre una función**. Las **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)** son un tipo de ED donde la función desconocida depende de **una sola variable independiente** (por ejemplo, x o t). Este es el enfoque principal del curso. En contraste, las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) involucran funciones que dependen de más de una variable independiente y derivadas parciales, aunque no son el foco de este curso.
Para economistas y actuarios, las EDO son herramientas matemáticas fundamentales porque permiten **captar y modelar la dinámica de variables a lo largo del tiempo**. A diferencia del análisis estático, las EDO revelan cómo se comporta una variable, si alcanzará un equilibrio o se alejará de él, lo que es crucial para comprender fenómenos como la acumulación de capital, el crecimiento poblacional o la inversión en activos financieros. El estudio de estas ecuaciones permite una comprensión profunda de los procesos que evolucionan, ofreciendo una visión más realista del mundo actual.

- **Definición fundamental:** Una ED involucra derivadas de una función desconocida.
- **Incógnita es una función:** El objetivo es encontrar la función que satisface la ecuación.
- **Relevancia económica:** Permiten modelar fenómenos dinámicos y analizar el comportamiento de variables a lo largo del tiempo.
- **Enfoque del curso:** Se centra principalmente en las EDO, donde la función depende de una sola variable.

1.2. Clasificación de las EDO

a clasificación de una EDO es un paso crucial, ya que determina el método de resolución adecuado].
Las EDO se pueden caracterizar por varias propiedades:

- **Orden**: Está determinado por la **derivada más elevada** que aparece en la ecuación. Por ejemplo, si la derivada más alta es la cuarta, la ecuación es de orden 4.
- **Grado**: Es el **mayor exponente** al que está elevada la derivada de mayor orden. Si la derivada de mayor orden (por ejemplo, la derivada segunda) está elevada al cuadrado, el grado de la ecuación es 2.
- **Coeficientes**: Son los factores que acompañan a las variables dependientes y sus derivadas . Pueden ser:
  - **Constantes** Números fijos (ej., $3y' + 2y = 9x$).
  - **Variables** Funciones de la variable independiente (ej., $5xy' + x^2y = 0$).
- **Linealidad** Las EDO se clasifican en lineales o no lineales, siendo las lineales un foco importante del curso. Una ecuación es lineal si la función incógnita y sus derivadas aparecen solo a la primera potencia y no están multiplicadas entre sí.

1.3. Soluciones de las EDO: General y Particular

l resolver una EDO, el objetivo es encontrar una función que satisfaga la ecuación. Existen dos tipos principales de soluciones:

- **Solución General** : Es una familia de funciones que contiene una **constante arbitraria** (generalmente denotada como C o K). Esta constante surge de la integración indefinida. La solución general representa un conjunto de infinitas funciones que comparten una misma estructura, diferenciándose solo por el valor de esta constante .
- **Solución Particular** : Es una función única y específica, obtenida a partir de la solución general . Para obtenerla, se utiliza una **condición inicial (C.I.)** . Una condición inicial es un dato que proporciona el valor de la función incógnita en un punto particular de la variable independiente (por ejemplo, $y(x_0) = y_0$). Al sustituir estos valores en la solución general, se puede despejar y determinar el valor numérico exacto de la constante arbitraria, lo que identifica una única función de la familia .

2. Método de Variables Separables

l método de variables separables es la **técnica más básica y fundamental** para resolver EDO de primer orden. Su importancia radica en que la resolución de EDO más complejas a menudo implica reducirlas a una forma de variables separables en algún punto del proceso .

2.1. Definición y Forma Característica

na EDO de primer orden se clasifica como **separable** si puede escribirse en la forma:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{2.1}$$

Donde $f(x)$ es una función que depende **únicamente de la variable independiente x**, y $g(y)$ es una función que depende **únicamente de la variable dependiente y**. El término "separable"hace referencia a la posibilidad de que el lado derecho de la ecuación se pueda descomponer en el producto de una función de x y una función de y.

2.2. Estrategia de Resolución Paso a Paso

l método de separación de variables sigue una estrategia clara y sistemática:

1. **Verificar soluciones constantes**: Antes de manipular la ecuación, se deben identificar los valores de y que hacen $g(y) = 0$. Estos valores pueden corresponder a soluciones constantes de la EDO.
2. **Reescribir la derivada**: Expresar la derivada y' en su forma diferencial $\frac{dy}{dx}$. Esto facilita la manipulación algebraica para la separación.
3. **Separar las variables**: Reorganizar algebraicamente la ecuación de manera que **todos los términos que contengan la variable dependiente y y su diferencial dy queden en un lado de la igualdad**, y **todos los términos que contengan la variable independiente x y su diferencial dx queden en el otro lado**. La forma resultante típica es:

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx \tag{2.2}$$

   Es crucial que no queden variables mezcladas en ninguno de los lados .
4. **Integrar ambos lados**: Una vez que las variables están separadas, se procede a integrar cada lado de la ecuación. Es fundamental tener un buen dominio de las técnicas de integración, como sustitución, integración por partes y fracciones simples.

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx \tag{2.3}$$

5. **Añadir la constante arbitraria**: Al realizar integrales indefinidas, cada una produce una constante de integración. Sin embargo, estas se agrupan en una **única constante arbitraria (C o K)**, que se suma en uno de los lados de la ecuación resultante.
6. **Despejar la función incógnita**: Si es posible, se resuelve la ecuación resultante para y para obtener una solución explícita de la forma $y = \phi(x)$. Si no es posible, se acepta una solución implícita . Este resultado es la **solución general** de la EDO.
7. **Aplicar condición inicial (si existe)**: Si se proporciona una condición inicial (x_0, y_0), se sustituyen estos valores en la solución general para determinar el valor numérico de la constante arbitraria, obteniendo así la **solución particular**.

2.3. Ejemplos Resueltos

A continuación, se presentan ejemplos que ilustran la aplicación del método de variables separables:

Ejemplo 1: Ecuación con Coeficientes Constantes y Variables

Halle la solución general y particular (si $y(6) = 1$) de la ecuación diferencial $3xy' - x^2y = 0$.
Solución: 1. **Reordenar y reescribir la derivada**: La ecuación dada es $3xy' - x^2y = 0$. Primero, movemos el término que no contiene la derivada al otro lado:

$$3xy' = x^2y$$

$$y' = \frac{x^2 y}{3x}$$
$$y' = \frac{xy}{3}$$

Ahora, reescribimos y' como $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{3}$$

Esta ecuación es de orden 1 y grado 1. Sus coeficientes son variables.
2. **Separar las variables**: Nuestro objetivo es agrupar todos los términos con y y dy a un lado, y todos los términos con x y dx al otro. Dividimos por y y multiplicamos por dx:

$$\frac{1}{y}dy = \frac{x}{3}dx$$

Las variables están completamente separadas.
3. **Integrar ambos lados**: Integramos ambas expresiones:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x}{3}dx$$
$$\ln|y| = \frac{1}{3}\int x dx$$
$$\ln|y| = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C_1$$
$$\ln|y| = \frac{x^2}{6} + C_1$$

Donde C_1 es la constante arbitraria resultante de la integración.
4. **Despejar la función incógnita (y)**: Para despejar y, aplicamos la exponencial a ambos lados de la ecuación:

$$|y| = e^{\frac{x^2}{6}+C_1}$$
$$|y| = e^{\frac{x^2}{6}} \cdot e^{C_1}$$

Definimos una nueva constante $K = \pm e^{C_1}$ (o simplemente $K = e^{C_1}$ si asumimos $y > 0$, o incluso K puede ser 0 si $y = 0$ es una solución constante). Esta constante K engloba la constante arbitraria y el signo del valor absoluto. Así, la **solución general** es:

$$y(x) = Ke^{\frac{x^2}{6}} \tag{2.4}$$

5. **Aplicar condición inicial (para solución particular)**: Se nos da la condición inicial $y(6) = 1$. Sustituimos $x = 6$ y $y = 1$ en la solución general:

$$1 = Ke^{\frac{6^2}{6}}$$
$$1 = Ke^{\frac{36}{6}}$$
$$1 = Ke^6$$
$$K = \frac{1}{e^6}$$
$$K = e^{-6}$$

Sustituimos el valor de K de nuevo en la solución general:

$$\mathbf{y_p(x) = e^{-6}e^{\frac{x^2}{6}}} \quad \text{o} \quad \mathbf{y_p(x) = e^{\frac{x^2}{6}-6}} \tag{2.5}$$

Esta es la **solución particular** para la condición inicial dada.

Ejemplo 2: Ecuación con Módulo y Condición Inicial

Resuelva la ecuación diferencial $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{y}$ con la condición inicial $y(2) = 4$.

Solución: 1. **Reordenar y separar**: La ecuación es $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{y}$. Tomamos la raíz cuadrada en ambos lados, lo que introduce un módulo :

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{y}}$$

Esta EDO es de orden 1 y grado 2 . Sus coeficientes son constantes . Ahora, separamos las variables :

$$\sqrt{y}dy = \pm dx \quad \text{o} \quad y^{1/2}dy = \pm dx$$

2. **Integrar ambos lados**: Integramos ambas expresiones:

$$\int y^{1/2}dy = \int \pm dx$$
$$\frac{y^{3/2}}{3/2} = \pm x + K_1$$
$$\frac{2}{3}y^{3/2} = \pm x + K_1$$

Para simplificar y alinear con el ejemplo de la fuente que termina en $2\sqrt{i} = x + K$, se asume que la integración o el problema original podría haber llevado a una forma donde la potencia de y sea $1/2$ después de la integración. Consideremos el ejemplo tal cual fue resuelto por el profesor donde el resultado de la integral del lado izquierdo fue $2\sqrt{i}$.

$$2\sqrt{y} = \pm x + K$$

Donde K es la constante arbitraria.
3. **Despejar la función incógnita (y)**: Despejamos y elevando al cuadrado ambos lados:

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(\pm x + K)$$
$$y = \left(\frac{1}{2}(\pm x + K)\right)^2$$

Esto nos da dos soluciones generales, una para el caso positivo y otra para el negativo (aunque ambas se pueden expresar de la misma forma al considerar K con diferentes signos):

$$y_1(x) = \left(\frac{1}{2}(x + K_1)\right)^2 \quad \text{y} \quad y_2(x) = \left(\frac{1}{2}(-x + K_2)\right)^2$$

4. **Aplicar condición inicial $y(2) = 4$**: Para la forma $2\sqrt{y} = \pm x + K$ y la condición $y(2) = 4$: Si consideramos el caso positivo $(+)$:

$$2\sqrt{4} = 2 + K$$
$$2 \cdot 2 = 2 + K$$
$$4 = 2 + K$$
$$K = 2$$

La solución particular sería $\mathbf{y_p(x)} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{2})\right)^{\mathbf{2}}$.
Si consideramos el caso negativo $(-)$:

$$2\sqrt{4} = -2 + K$$
$$4 = -2 + K$$
$$K = 6$$

La solución particular sería $\mathbf{y_p(x)} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(-\mathbf{x} + \mathbf{6})\right)^{\mathbf{2}}$. Ambas soluciones son válidas y cumplen la condición inicial. Este ejemplo demuestra cómo el módulo en el despeje puede llevar a múltiples soluciones particulares.

Analogías y Conclusiones Parciales

El método de variables separables es como clasificar y organizar los ingredientes de una receta antes de cocinar. Para cada lado de la igualdad, solo se permiten ingredientes de un tipo (variables X o variables Y) . Una vez que todo está en su lugar, el çocinado.[es] la integración, que combina esos ingredientes de manera controlada. Finalmente, si tenemos un dato específico (una condición inicial), es como probar la comida para ajustar el condimento, obteniendo un sabor único que se adapte perfectamente a nuestras necesidades. Dominar esta técnica es como aprender a sumar antes de hacer cálculos complejos; es la base ineludible para resolver EDO más avanzadas, ya que muchas se reducen a esta forma en algún punto.

3. Importancia de Variables Separables en Otros Métodos

l método de variables separables es fundamental no solo por su simplicidad intrínseca, sino también porque es la **base sobre la cual se construyen muchos otros métodos** de resolución de EDO de primer orden. Frecuentemente, EDO que inicialmente parecen más complejas pueden ser transformadas, mediante sustituciones o factores, a una forma separable en alguna etapa de su resolución.
Por ejemplo, las **Ecuaciones Diferenciales Homogéneas** de la forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ con P y Q funciones homogéneas del mismo grado) se resuelven mediante una sustitución $v = y/x$ que las convierte en ecuaciones de variables separables . De manera similar, las **Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli** e pueden reducir a EDO lineales, y estas últimas a menudo se resuelven utilizando un factor integrante que, en última instancia, transforma la ecuación en una forma integrable por separación de variables. Este método, el factor integrante, es descrito como ïnfalible"para las EDO lineales.

4. Preparación y Recursos del Curso

l curso promueve un **rol activo y proactivo** del estudiante, fomentando la interacción, el trabajo en grupo y la resolución activa de problemas, en contraste con un aprendizaje pasivo o .[es]tilo Netflix". Para apoyar este modelo pedagógico y asegurar el dominio de los temas, la cátedra proporciona diversas herramientas y recursos:

- **Test Inicial Diagnóstico** Un cuestionario no calificatorio que los estudiantes deben completar para autoevaluarse y permitir a los profesores diagnosticar los conocimientos previos del grupo. Es crucial responderlo con sinceridad para identificar áreas de refuerzo.
- **Proyecto Batic** Un sistema de seguimiento personalizado (voluntario) que utiliza inteligencia artificial para enviar retroalimentación y materiales de repaso específicos vía correo electrónico (desde "proyecto batic") . La experiencia ha demostrado una correlación positiva entre la participación activa en estos formularios (más del 75 %) y el éxito en los exámenes.
- **Bibliografía Obligatoria y Complementaria**
  - **Obligatoria**: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática"de Chiang, A. C. Wainwright, K (2006) (conocido como Çhang azul"para la primera parte, capítulo 15 para variables separables, y Çhang rojo"para la segunda).
  - **Complementaria**: .[A]nálisis Matemático II con aplicaciones a la Economía"de Di Caro H., Gallego L. (1999) (capítulo 10) , así como apuntes propios de la cátedra como el libro "Bernardelo". Se anima a los estudiantes a explorar bibliografía internacional más allá de las notas de clase.
- **Lectura Previa** Se recomienda encarecidamente leer el material antes de cada clase para mejorar la comprensión y la capacidad de interacción.
- **Temas Previos Fundamentales** El curso es acumulativo, por lo que dominar ciertos conocimientos previos es indispensable. Los temas cruciales incluyen:
  - **Integrales**: Manejo de técnicas de integración como sustitución, por partes y fracciones simples es vital para la resolución de EDO.
  - **Autovalores y Autovectores** Son fundamentales para la primera parte de la materia, especialmente para los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.
  - **Topología de Funciones, Optimización Clásica y Kunitacker (Condiciones de Kuhn-Tucker)** Necesarios para la segunda parte del curso, en particular para Control Óptimo .

  La recomendación clave es no retrasar el repaso de estos temas, ya que su dominio temprano es

crucial para el éxito en la materia .

5. Conclusión Global

Las ecuaciones diferenciales, especialmente las ordinarias de variables separables, constituyen una herramienta analítica indispensable para economistas y actuarios al permitir modelar y comprender la dinámica de fenómenos complejos. Su estudio trasciende el mero cálculo, ofreciendo la capacidad de anticipar comportamientos, predecir equilibrios y fundamentar decisiones estratégicas en contextos económicos y financieros. El método de variables separables, siendo la base de aproximaciones más avanzadas, demanda una participación activa del estudiante, el dominio de habilidades de integración y una actitud proactiva. Al integrar teoría, práctica y recursos tecnológicos como el Proyecto Batic, el curso busca no solo impartir conocimientos técnicos, sino también cultivar un pensamiento analítico que capacite al futuro profesional para abordar desafíos dinámicos con rigor y creatividad. Este enfoque asegura una comprensión profunda y aplicable de la matemática en el ámbito de las ciencias económicas.

- **Ecuaciones Diferenciales (ED)**
  - **Definición**: Una ecuación que involucra **derivadas de una función desconocida**.
  - **Incógnita**: La incógnita principal es siempre una **función**.
  - **Utilidad Principal**: Permiten modelar la **dinámica de variables a lo largo del tiempo**, como el crecimiento poblacional, la acumulación de capital, o la convergencia a un equilibrio en economía y actuariado .
  - **Tipos Principales**:
    - **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)**: La función desconocida depende de **una sola variable independiente** (ej. 'x' o 't'). Son el **enfoque principal** del curso.
    - Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP): La función desconocida depende de múltiples variables e involucra derivadas parciales. (No son el foco de este curso).
  - **Clasificación de las EDO** (Es **crucial** para determinar el método de resolución):
    - **Orden**: La **derivada más elevada** que aparece en la ecuación.
    - **Grado**: El **mayor exponente** al que está elevada la derivada de mayor orden.
    - **Coeficientes**: Factores que acompañan a las variables dependientes y sus derivadas. Pueden ser:
      - ◇ **Constantes**: Números fijos.
      - ◇ **Variables**: Funciones de la variable independiente.
    - **Linealidad**: Clasificación en lineales y no lineales (se hará mucho énfasis en las lineales).
  - **Soluciones de las EDO**:
    - **Solución General**: Una **familia de funciones** que contiene una **constante arbitraria** (C o K).
    - **Solución Particular**: Una **función única** que se obtiene al utilizar una **condición inicial** para determinar el valor de la constante arbitraria.
    - **Condición Inicial (C.I.)**: Un dato específico (un par de valores (x,y)) que se usa para determinar la constante arbitraria y obtener la solución particular.
    - **Constante Arbitraria (C o K)**: Resultante de la integración indefinida, agrupa las constantes de ambos lados de la ecuación.
- **Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables**
  - **Definición**: Es el método **más básico y fundamental** para EDO de primer orden. Una ecuación es separable si puede escribirse en la forma $y' = f(x) \cdot g(y)$.
  - **Postulado (Teorema de Picard-Lindelöf)**: Si $f(x)g(y)$ es continua y cumple la condición de Lipschitz en y en un entorno del punto inicial, existe una **solución única** que pasa por dicho punto.
  - **Relaciones con Otros Conceptos**:
    - Es la **base fundamental** para la resolución de muchos otros tipos de EDO de primer orden (homogéneas, lineales, Bernoulli, exactas), ya que estos métodos a menudo las **reducen a una forma de variables separables**.
    - Requiere un **dominio sólido de Integrales**, incluyendo sustitución, por partes y fracciones simples.
  - **Secuencia Paso a Paso de Resolución (Método de Separación de Variables)**:
    a) **Verificar soluciones constantes**: Identificar valores de y que hagan $g(y) = 0$. Estos corresponden a soluciones constantes.
    b) **Reescribir la derivada**: Expresar y' como $\frac{dy}{dx}$.
    c) **Separar las variables**: Reorganizar algebraicamente la ecuación para que todos los términos que contengan y y dy queden en un lado de la igualdad, y todos los términos con x y dx queden en el otro.
    d) **Integrar ambos lados** de la ecuación.
    e) **Añadir la constante arbitraria**: Sumar una única constante arbitraria (C o K) en uno de los lados de la ecuación resultante.
    f) **Despejar la función incógnita** (y): Resolver la ecuación resultante para y si es posible (solución explícita), o mantener una forma implícita .
    g) **Aplicar condición inicial (si existe)**: Sustituir los valores (x_0, y_0) de la condición inicial en la solución general para determinar el valor numérico de la constante y obtener la **solución particular**.

Preguntas Frecuentes (FAQs)

1. ¿Cuál es la incógnita principal que se busca resolver en una ecuación diferencial?

La incógnita principal que se busca resolver en una ecuación diferencial es una **función**. Esta función describe cómo una variable dependiente se comporta con respecto a una o más variables independientes, revelando así una dinámica.

2. ¿Qué determinan el .ºrdenz el "grado"de una EDO?

El .ºrden"de una EDO está determinado por la **derivada de mayor orden** que aparece en la ecuación. Por otro lado, el "grado"se refiere al **mayor exponente** al que está elevada esa derivada de mayor orden.

3. ¿Cuál es la forma característica que debe tener una EDO para ser clasificada como "separable¿

Para ser clasificada como "separable", una EDO de primer orden debe poder expresarse en la forma $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$, donde $f(x)$ es una función que solo depende de x y $g(y)$ es una función que solo depende de y.

4. ¿Por qué se agrega una única constante arbitraria al integrar ambos lados en el método de variables separables?

Se agrega una única constante arbitraria porque, al integrar ambos lados de la ecuación, cada integral indefinida produce su propia constante de integración. Estas dos constantes se combinan algebraicamente en una sola constante resultante que se coloca en un lado de la igualdad, representando una familia de soluciones.

5. ¿Cuál es la importancia del método de variables separables en el contexto general de las EDO de primer orden?

El método de variables separables es de suma importancia porque es la **base fundamental** para muchos otros métodos de resolución de EDO de primer orden. Numerosas ecuaciones diferenciales más complejas (como las homogéneas o de Bernoulli) se reducen a una forma de variables separables en alguna etapa de su solución.

ECUACIONES HOMOGENEAS

@toobaziti

Disclaimer: Este documento ha sido elaborado a partir de la grabación de una clase, el slide visto en clase y el texto recomendados. Puede contener errores u omisiones asociados a la calidad del audio, cortes involuntarios o dificultades de transcripción. Por favor, consúltese siempre la fuente original de la grabación si se requiere confirmación de algún detalle.

Índice

1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de Primer Orden **1**
1.1. Definición y Propósito de las EDOs de Primer Orden . . . 1
1.1.1. Definiciones . . . 1
1.1.2. Contexto . . . 1
1.1.3. Prerrequisitos Esenciales . . . 1
1.1.4. Clasificación de EDOs de Primer Orden . . . 1
1.1.5. Notación y Vocabulario Clave . . . 1
1.1.6. Conclusiones Parciales . . . 2

2. Funciones Homogéneas: Concepto y Propiedades **2**
2.1. Definición de Función Homogénea . . . 2
2.1.1. Definiciones . . . 2
2.1.2. Ejemplos de Funciones Homogéneas con Diferentes Grados . . . 3
2.1.3. Determinación del Grado de Homogeneidad de una Función . . . 3
2.1.4. Procesos . . . 3
2.1.5. Ejemplo: Determinar el grado de $f(x, y) = x^3 - 2xy^2$ . . . 3
2.1.6. Conclusiones Parciales . . . 4

3. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Primer Orden: Definición e Identificación **4**
3.1. Definición de Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden . . . 4
3.1.1. Definiciones . . . 4
3.1.2. Contexto . . . 4
3.2. Identificación de una EDO Homogénea . . . 4
3.2.1. Fórmulas y Procesos . . . 4
3.2.2. Microejemplos Rápidos . . . 5
3.2.3. Conclusiones Parciales . . . 5

4. Método de Resolución de EDO Homogéneas **5**
4.1. Algoritmo General de Solución para EDOs Homogéneas . . . 5
4.1.1. Fórmulas y Procesos . . . 5
4.2. Errores Comunes durante la Resolución . . . 6
4.2.1. Análisis e Ideas Clave . . . 6
4.3. Ejemplos Prácticos de Resolución . . . 6
4.3.1. Ejemplo 1: EDO Homogénea (Forma explícita) . . . 6
4.3.2. Ejemplo 2: EDO Homogénea (con Condición Inicial) . . . 7
4.3.3. Conclusiones Parciales . . . 7

5. Análisis y Propiedades: Interpretación, Existencia y Unicidad **7**
5.1. Interpretación Geométrica de EDOs Homogéneas . . . 7
5.1.1. Análisis e Ideas Clave . . . 7
5.2. Interpretación Económica . . . 8
5.2.1. Contexto . . . 8
5.3. Hipótesis y Condiciones de Regularidad para Existencia y Unicidad . . . 8
5.3.1. Análisis e Ideas Clave . . . 8
5.3.2. Conclusiones Parciales . . . 8

6. Problema de Consolidación (Teoría + Cálculo + Interpretación) **8**
6.1. Enunciado del Problema . . . 9
6.2. Solución Escalona del Problema . . . 9

7. Red Conceptual del Tema **10**

1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de Primer Orden

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) representan una de las herramientas matemáticas más poderosas y versátiles para el modelado de fenómenos dinámicos en diversas disciplinas, desde la física y la biología hasta la economía y la ingeniería. Una EDO es, en esencia, una ecuación que involucra una función desconocida y una o más de sus derivadas con respecto a una única variable independiente. Su utilidad radica en la capacidad de describir cómo los sistemas evolucionan a lo largo del tiempo, permitiendo analizar trayectorias, estabilidad y puntos de equilibrio. Este informe se centrará en una categoría específica: las EDO homogéneas de primer orden, fundamentales para entender sistemas donde la tasa de cambio depende de proporciones relativas, no de valores absolutos. Para abordar estas ecuaciones, se requiere un sólido manejo de conceptos de álgebra, cálculo diferencial e integral.

1.1. Definición y Propósito de las EDOs de Primer Orden

1.1.1. Definiciones

Una **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)** es una ecuación que relaciona una función desconocida, una o más de sus derivadas y una variable independiente. Un ejemplo básico es una ecuación con la función y y su derivada dy/dx. La forma general de una EDO de primer orden es:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

donde $y(x)$ es la función incógnita y x es la variable independiente.

1.1.2. Contexto

El propósito principal de las EDOs de primer orden es el **análisis dinámico de sistemas**, modelando la evolución de variables a lo largo del tiempo. Esto contrasta con el análisis estático, que se enfoca en valores de equilibrio en un momento dado. En **economía**, las EDOs se aplican en modelos demográficos (como el crecimiento poblacional bajo influencias no lineales) y en modelos de crecimiento económico, donde las tasas de cambio de variables como el capital o el producto per cápita son influenciadas por razones o proporciones de los factores de producción. Resolver estas ecuaciones permite determinar la trayectoria de una variable cuyo ritmo de cambio depende de la proporción entre las variables involucradas, más que de sus valores absolutos individuales.

1.1.3. Prerrequisitos Esenciales

Para comprender y resolver EDOs se requiere un sólido manejo de **álgebra básica**, **funciones reales**, **límites** y **cálculo integral** (especialmente integración por variables separables). Además, es crucial el conocimiento de **derivadas**, incluyendo las parciales.

1.1.4. Clasificación de EDOs de Primer Orden

Las EDOs se clasifican según el **orden** (la derivada de mayor grado), la **linealidad** (si la incógnita y sus derivadas aparecen de forma lineal) y la **homogeneidad** (si el lado derecho es cero o si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero). Los principales tipos de EDOs de primer orden incluyen: **Variables Separables**, **Homogéneas**, **Lineales**, de **Bernoulli** y **Exactas**. Este informe se centrará en las EDOs Homogéneas.

1.1.5. Notación y Vocabulario Clave

La notación es crucial para expresar relaciones dinámicas de forma concisa.

- **Variables:**
  - t: Variable independiente (comúnmente el tiempo).
  - x: Variable independiente.
  - y: Variable dependiente, la función incógnita ($y(x)$ o $y(t)$).

  - v: Variable auxiliar introducida por la sustitución $v = y/x$.

- **Funciones:**
  - $f(x, y)$: Describe la tasa de cambio de la variable dependiente. Forma general: $dy/dx = f(x, y)$.
  - $F(y/x)$: Forma específica que adopta $f(x, y)$ para que la EDO sea homogénea.
  - $P(x, y)$ y $Q(x, y)$: Funciones en la forma diferencial $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.
- **Operadores y Convenciones:**
  - y' o dy/dx: Denotan la primera derivada de y con respecto a x.
  - $\int \dots dx$: Símbolo de la integral indefinida. Siempre se añade una constante de integración (C).
  - $\partial M/\partial y$ o $\partial N/\partial x$: Derivadas parciales, usadas para verificar exactitud.
  - $\ln(\cdot)$: Logaritmo natural, frecuente en soluciones de variables separables.
- **Vocabulario:** Ecuación diferencial ordinaria (EDO), orden, grado, variables separables, solución general, solución particular.

1.1.6. Conclusiones Parciales

Las EDOs son el lenguaje matemático para describir **fenómenos en evolución**, diferenciándose del análisis estático por su capacidad de modelar el cambio continuo. Su relevancia se extiende a múltiples campos, incluida la **economía**, donde permiten analizar dinámicas complejas como el crecimiento de poblaciones o la acumulación de capital. La comprensión de una EDO comienza con su definición y propósito, la identificación de los prerrequisitos necesarios en álgebra y cálculo, y el dominio de una notación y vocabulario específicos. La clasificación de las EDOs es fundamental, ya que guía la elección de los métodos de resolución adecuados. Este conocimiento inicial es el cimiento para abordar tipos más específicos, como las EDO homogéneas, que revelan comportamientos particulares en sistemas dinámicos.

2. Funciones Homogéneas: Concepto y Propiedades

Antes de adentrarse en las Ecuaciones Diferenciales Homogéneas, es fundamental comprender el concepto de **función homogénea**. Estas funciones poseen una propiedad de escalamiento particular que las hace herramientas clave para simplificar problemas y reconocer simetrías. Su estudio es un pilar conceptual para entender por qué ciertas EDOs pueden resolverse de manera sistemática. La homogeneidad no es solo una curiosidad teórica; es una característica con amplias aplicaciones en campos como la economía, donde se utiliza en funciones de producción o utilidad para modelar cómo los cambios proporcionales en los insumos afectan la producción o el bienestar. La claridad en esta definición sentará las bases para la identificación y resolución de las EDO homogéneas.

2.1. Definición de Función Homogénea

2.1.1. Definiciones

Una función $f(x, y)$ de dos variables se dice **homogénea de grado** n si cumple la siguiente propiedad para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \tag{2}$$

El **grado** n indica cómo escala la función al multiplicar todas sus variables por un mismo factor. Si $n = 0$, la función es homogénea de grado cero, lo que significa que su valor no cambia con una escala proporcional de sus variables.

2.1.2. Ejemplos de Funciones Homogéneas con Diferentes Grados

- **Grado 0:**
  - $f(x,y) = e^{y/x}$.
  - $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
  - $f(x,y) = \frac{x}{y}$.
  - $f(x,y) = \frac{y}{x-y}$.
  - $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.
- **Grado 1/2:** $f(x,y) = \sqrt{\frac{y+x}{yx}}$.
- **Grado 1:** $f(x,y) = x + y$.
- **Grado 2:**
  - $f(x,y) = x^2 + y^2$.
  - $f(x,y) = xy$.
  - $f(x,y) = 2xy - y^2 - x^2$.
- **Grado 3:** $f(x,y) = x^3 - 2xy^2$.

2.1.3. Determinación del Grado de Homogeneidad de una Función

2.1.4. Procesos

Para determinar el grado de homogeneidad de una función $f(x,y)$:

1. **Multiplicar todas las variables por λ:** Reemplazar x por λx y y por λy en la función.
2. **Factorizar el resultado:** Manipular algebraicamente la expresión para extraer la mayor potencia posible de λ.
3. **Verificar la potencia de λ:** Si la expresión resultante puede escribirse como $\lambda^n f(x,y)$, entonces la función es homogénea de grado n.

Un **atajo práctico** para funciones polinómicas es sumar los exponentes de las variables en cada término; si todos los términos tienen la misma suma, ese es el grado de homogeneidad.

2.1.5. Ejemplo: Determinar el grado de $f(x,y) = x^3 - 2xy^2$

1. Sustituimos $x \to \lambda x$ y $y \to \lambda y$:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^3 - 2(\lambda x)(\lambda y)^2 \\ &= \lambda^3 x^3 - 2\lambda x \lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 x y^2 \end{aligned}$$

2. Factorizamos λ^3:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 (x^3 - 2xy^2)$$

3. Identificamos $f(x,y)$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x,y)$$

Por lo tanto, la función $f(x,y) = x^3 - 2xy^2$ es **homogénea de grado 3**.

2.1.6. Conclusiones Parciales

El concepto de **función homogénea** es vital para entender la estructura subyacente de ciertas ecuaciones diferenciales. Se define por su comportamiento de **escalamiento**, donde al multiplicar sus variables por un factor λ, la función se amplifica por λ^n, siendo n el grado de homogeneidad. La capacidad de identificar y determinar el grado de estas funciones, ya sea mediante la aplicación directa de la definición o por atajos para funciones polinómicas, es una habilidad fundamental. Esta comprensión no solo es un requisito teórico, sino que revela **simetrías y propiedades de invariancia** que son directamente explotables en la resolución de ecuaciones diferenciales, especialmente aquellas que, como veremos, dependen de las proporciones de sus variables.

3. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Primer Orden: Definición e Identificación

Las Ecuaciones Diferenciales Homogéneas (EDO homogéneas) de primer orden constituyen una categoría fundamental dentro del vasto campo de las EDOs, distinguiéndose por una característica estructural que facilita enormemente su resolución. A diferencia de otras ecuaciones, la tasa de cambio en una EDO homogénea no depende de los valores absolutos de las variables, sino exclusivamente de su **proporción**. Esta propiedad de invarianza de escala es la clave que permite aplicar una estrategia de sustitución específica para transformarlas en ecuaciones de variables separables, que son mucho más sencillas de integrar. La capacidad de identificar correctamente una EDO homogénea es el primer paso y el más crucial en el proceso de su resolución.

3.1. Definición de Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden

3.1.1. Definiciones

Una EDO de primer orden es **homogénea** si se puede expresar en una de las siguientes formas:

- **Forma explícita:** $dy/dx = f(x, y)$, donde la función $f(x, y)$ puede expresarse como $F(y/x)$. Esto significa que $f(x, y)$ es una función homogénea de **grado cero**.
- **Forma diferencial:** $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son **funciones homogéneas del mismo grado**.

3.1.2. Contexto

La propiedad de homogeneidad de grado cero implica que el **comportamiento del sistema solo depende de las proporciones**, no de las escalas absolutas. Por ejemplo, si doblamos tanto x como y, la tasa de cambio dy/dx sigue siendo la misma. Esto es crucial en aplicaciones donde las dinámicas se rigen por **ratios** o tasas relativas, como en modelos económicos de capital por trabajador o productividad por unidad.

3.2. Identificación de una EDO Homogénea

3.2.1. Fórmulas y Procesos

Para identificar si una EDO es homogénea:

- **Para la forma explícita ($dy/dx = f(x, y)$):**
  1. Intente reescribir la función $f(x, y)$ de tal manera que todos sus términos dependan únicamente de la razón y/x (o x/y).
  2. Un método práctico es **dividir el numerador y el denominador por la potencia más alta de** x (o y) que aparezca en $f(x, y)$. Si la expresión resultante puede escribirse como una función de y/x, es homogénea.
- **Para la forma diferencial ($P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$):**
  1. Determine el grado de homogeneidad de $P(x, y)$.
  2. Determine el grado de homogeneidad de $Q(x, y)$.
  3. Si ambos son funciones homogéneas y tienen **el mismo grado**, la EDO es homogénea.

3.2.2. Microejemplos Rápidos

- **Ejemplo 1 (Forma explícita - es homogénea):**

$$\text{EDO: } \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}$$
$$\text{Reescribiendo: } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{x} = \frac{y}{x} - 1$$

Se observa que la expresión es una función de (y/x), $F(y/x) = (y/x) - 1$. Por lo tanto, **es homogénea**.

- **Ejemplo 2 (Forma diferencial - es homogénea):**

$$\text{EDO: } (x^2+y^2)dx - 2xy\,dy = 0$$
$$\text{Reescribiendo a } dy/dx: \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$
$$\text{Dividiendo num. y den. por } x^2: \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2/x^2)+(y^2/x^2)}{2xy/x^2} = \frac{1+(y/x)^2}{2(y/x)}$$

El lado derecho es una función de (y/x), $F(y/x) = \frac{1+(y/x)^2}{2(y/x)}$. Por lo tanto, **es homogénea**.

- **Contraejemplo (No homogénea):**

$$\text{EDO: } \frac{dy}{dx} = y + x^2$$

Aquí, el lado derecho no puede expresarse como una función de (y/x). Si se intenta dividir por x, se obtiene $y/x + x$, y el término x no está en proporción con y. Por lo tanto, **no es homogénea**. La presencia de un término puro de x (o t) o un término constante rompe la homogeneidad.

3.2.3. Conclusiones Parciales

La identificación de una EDO homogénea es el **punto de partida crítico** para aplicar el método de resolución adecuado. Esta clase de ecuaciones se distingue por depender exclusivamente de la **razón** y/x, lo que se refleja en que su función $f(x,y)$ es **homogénea de grado cero** o, en su forma diferencial, sus coeficientes $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son **homogéneos del mismo grado**. La intuición es que su comportamiento es **invariante a escala**, es decir, la dinámica no cambia si las variables se amplían o reducen proporcionalmente. Dominar la verificación de esta propiedad, ya sea reescribiendo la función o comprobando los grados de homogeneidad de P y Q, es indispensable para elegir correctamente la estrategia de resolución y evitar aplicar métodos ineficaces a ecuaciones no homogéneas.

4. Método de Resolución de EDO Homogéneas

La resolución de EDOs homogéneas de primer orden es un proceso sistemático que transforma una ecuación aparentemente compleja en una forma más sencilla: una ecuación de variables separables. Este método se basa en una **sustitución clave** que aprovecha la naturaleza de la homogeneidad de la ecuación. Al dominar cada paso, desde la identificación inicial hasta la reversión de la sustitución, se desbloquea una técnica poderosa para encontrar las soluciones generales o particulares de una amplia gama de problemas dinámicos en matemáticas, ciencias e ingeniería. La claridad en el proceso algebraico es fundamental para evitar errores comunes y asegurar la precisión de la solución final.

4.1. Algoritmo General de Solución para EDOs Homogéneas

4.1.1. Fórmulas y Procesos

El procedimiento estándar para resolver una EDO homogénea $\frac{dy}{dx} = F(y/x)$ es el siguiente:

1. **Paso 1: Normalización/Identificación:** Identificar la EDO como homogénea. Si está en la forma diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, dividirla por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de P y Q) para llevarla a la forma $f_1(y/x)dx + f_2(y/x)dy = 0$ o $dy/dx = F(y/x)$.

2. **Paso 2: Planteamiento de la Sustitución Clave:** Plantear la sustitución $v = y/x$, lo que implica $y = vx$. Luego, derivar $y = vx$ implícitamente con respecto a x usando la regla del producto para obtener $dy/dx = v + x(dv/dx)$.
3. **Paso 3: Transformación a Ecuación de Variables Separables:** Sustituir dy/dx y y/x por sus equivalentes en términos de v y dv/dx en la EDO original, obteniendo $v + x(dv/dx) = F(v)$. Reordenar algebraicamente para separar las variables v y x: $x(dv/dx) = F(v) - v \implies \frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dx}{x}$ (asumiendo $F(v) - v \neq 0$).
4. **Paso 4: Integración:** Integrar ambos lados de la ecuación de variables separables: $\int \frac{dv}{F(v)-v} = \int \frac{dx}{x}$. No olvidar la constante de integración (C).
5. **Paso 5: Reversión de la Sustitución:** Una vez obtenida la solución en términos de v y x, reemplazar v por y/x para expresar la solución en términos de las variables originales y y x. Esta es la **solución general**.
6. **Paso 6: Solución Particular (si aplica):** Si se dan condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, sustituir estos valores en la solución general para encontrar el valor específico de C, obteniendo así la **solución particular**.

4.2. Errores Comunes durante la Resolución

4.2.1. Análisis e Ideas Clave

- **No identificar la homogeneidad:** Intentar aplicar la sustitución $y = vx$ a una EDO no homogénea.
- **Error al derivar $y = vx$:** Derivar $y = vx$ sin aplicar correctamente la regla del producto, olvidando que v es una función de x. La derivada correcta es $dy/dx = v + x(dv/dx)$.
- **Separación de variables incorrecta:** No aislar correctamente todos los términos de v con dv y los de x con dx.
- **Olvidar la constante de integración (C) o manejarla mal:** No añadir C después de integrar o no incluirla correctamente al despejar. La solución general de una EDO de primer orden siempre debe contener una constante arbitraria.
- **No revertir la sustitución o revertirla incorrectamente:** Dejar la solución en términos de v y x, o cometer errores algebraicos al reemplazar v por y/x. La solución final debe ser $y(x)$.

4.3. Ejemplos Prácticos de Resolución

4.3.1. Ejemplo 1: EDO Homogénea (Forma explícita)

Resolver: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$.

1. **Paso 1: Normalización.** Ya está en la forma $dy/dx = F(y/x)$: $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$.
2. **Paso 2: Sustitución Clave.** Plantear $v = y/x \implies y = vx$. Derivando: $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.
3. **Paso 3: Transformación a Variables Separables.** Sustituir en la EDO:

$$\begin{aligned} v + x\frac{dv}{dx} &= 1 + v \\ x\frac{dv}{dx} &= 1 \\ dv &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

4. **Paso 4: Integración.** Integrar ambos lados:

$$\begin{aligned} \int dv &= \int \frac{1}{x} dx \\ v &= \ln|x| + C \end{aligned}$$

5. **Paso 5: Reversión de la Sustitución.** Reemplazar $v = y/x$:

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C$$
$$y(x) = x(\ln|x| + C)$$

Solución general: $y(x) = x\ln|x| + Cx$.

4.3.2. Ejemplo 2: EDO Homogénea (con Condición Inicial)

Resolver: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$, con $y(1) = 2$.

1. **Paso 1-5:** La solución general ya se obtuvo en el Ejemplo 1: $y(x) = x\ln|x| + Cx$.
2. **Paso 6: Solución Particular.** Aplicar la condición inicial $y(1) = 2$:

$$2 = 1 \cdot \ln|1| + C(1)$$
$$2 = 0 + C$$
$$C = 2$$

Solución particular: $y(x) = x\ln|x| + 2x$.

4.3.3. Conclusiones Parciales

El método de resolución de EDOs homogéneas de primer orden es una **secuencia algorítmica y poderosa** que transforma una ecuación no lineal en una de variables separables. La **sustitución** $v = y/x$ es el corazón de este proceso, simplificando la dependencia de la razón de variables y permitiendo una **integración directa**. Cada paso, desde la normalización hasta la reversión, es crucial y requiere precisión algebraica. La obtención de la **solución general** revela una familia de curvas, mientras que las **condiciones iniciales** permiten hallar una **solución particular única**. Dominar este método no solo es una habilidad técnica, sino que también fomenta la capacidad de reconocer y explotar estructuras matemáticas, un paso esencial hacia la resolución de problemas dinámicos más complejos en diversas disciplinas.

5. Análisis y Propiedades: Interpretación, Existencia y Unicidad

Más allá de la mera resolución algorítmica, comprender las propiedades intrínsecas de las EDOs homogéneas es fundamental para una interpretación profunda de los sistemas dinámicos que modelan. La **invariancia de escala** de estas ecuaciones no es solo una característica matemática, sino un concepto con ricas implicaciones geométricas y económicas. Asimismo, las condiciones que garantizan la **existencia y unicidad** de las soluciones son cruciales para validar la pertinencia de un modelo y predecir su comportamiento de manera fiable. Explorar los fallos de estas condiciones, que pueden dar lugar a soluciones no únicas o singulares, enriquece la comprensión de los límites del análisis y la diversidad de comportamientos que una EDO puede exhibir.

5.1. Interpretación Geométrica de EDOs Homogéneas

5.1.1. Análisis e Ideas Clave

La interpretación geométrica de las EDOs homogéneas se basa en su propiedad de **invariancia de escala**.

- **Isoclinas radiales:** Para una EDO homogénea $dy/dx = F(y/x)$, la pendiente dy/dx es **constante a lo largo de cualquier línea recta que pasa por el origen**. Estas líneas, donde $y/x =$ constante, son las **isoclinas**.
- **Campo de pendientes:** Al dibujar varias isoclinas (para $y/x = m$), se obtiene un "mapa topográfico"de inclinaciones, donde todas las "flechitas"sobre una misma isoclina apuntan con la misma inclinación m.

- **Soluciones tangentes:** Las soluciones de la EDO son curvas que en cada punto son tangentes a la flecha del campo de pendientes, y por ende, coherentes con las isoclinas que atraviesan.

Analogía del zoom fotográfico: Si la ecuación no cambia al reescalar ambos ejes, lo relevante es **la forma**, no el tamaño de la "foto". Las soluciones muestran simetrías radiales respecto al origen.

5.2. Interpretación Económica

5.2.1. Contexto

La característica de invariancia de escala tiene profundas implicaciones económicas.

- **Independencia de la escala absoluta:** El comportamiento dinámico del sistema es **independiente de la escala absoluta de las variables**, dependiendo solo de sus **proporciones relativas**. Por ejemplo, las dinámicas que rigen un sistema son las mismas si una economía es grande o pequeña, siempre que la proporción de sus componentes clave se mantenga constante.
- **Variables intensivas:** Esto es típico en interpretaciones ïntensivas", como productividad por unidad, capital por trabajador o gasto relativo.
- **Equilibrios y rutas balanceadas:** En modelos económicos, las soluciones pueden converger a una proporción constante $(y/x)^*$, lo que indica un estado de **equilibrio intensivo** o una **ruta de crecimiento balanceado** donde las variables crecen o decrecen de forma coordinada. Un equilibrio intensivo ocurre cuando $F(v^*) = v^*$, implicando que $dv/dx = 0$.

5.3. Hipótesis y Condiciones de Regularidad para Existencia y Unicidad

5.3.1. Análisis e Ideas Clave

Para que una EDO homogénea tenga soluciones bien definidas, se requieren ciertas hipótesis:

- **Continuidad:** La función $F(v)$ (donde $v = y/x$) debe ser **continua** en el intervalo de interés. Esto asegura que no haya "saltos.en la tasa de cambio y garantiza la **existencia** de al menos una solución local que pase por un punto inicial dado.
- **Diferenciabilidad (o Lipschitz en y):** Para garantizar la **unicidad de la solución** de un problema de valor inicial (PVI), se requiere que $f(x, y)$ sea **Lipschitz** con respecto a y en una vecindad del punto. Esto implica que $f(x, y)$ no debe crecer "demasiado rápidoçon respecto a y.
- **Dominio de la sustitución:** La sustitución $y = vx$ implica que $x \neq 0$. El análisis se realiza donde $x \neq 0$. **Analogía:** Si f es un çampo de viento", la continuidad significa que el viento no tiene "saltos". La condición de Lipschitz implica que no hay remolinos infinitos"que descontrolen la navegación, asegurando una ruta única desde un punto.

5.3.2. Conclusiones Parciales

La comprensión de las EDOs homogéneas se enriquece al situarlas en un contexto más amplio de las ecuaciones diferenciales, reconociendo sus **diferencias** con las lineales homogéneas y sus **analogías** con las de Bernoulli en el uso de transformaciones de variable. Las çasi homogéneas"demuestran la flexibilidad de aplicar ligeras modificaciones para adecuar una EDO al método homogéneo. Estas ecuaciones actúan como un **puente fundamental** con otras áreas del cálculo, como las derivadas parciales y la integración, y con conceptos más abstractos como la homogeneidad de funciones y el Teorema de Euler. Explorar estas conexiones y las variantes más avanzadas permite no solo un dominio técnico, sino una visión integral de cómo las EDOs son herramientas versátiles para modelar y analizar sistemas dinámicos complejos.

6. Problema de Consolidación (Teoría + Cálculo + Interpretación)

La verdadera comprensión de las Ecuaciones Diferenciales Homogéneas se demuestra en la capacidad de aplicar la teoría, ejecutar el cálculo y, crucialmente, interpretar los resultados en un contexto significativo. Este problema de consolidación ha sido diseñado para integrar todos estos aspectos, desde

la demostración de la homogeneidad, pasando por la resolución paso a paso, hasta el análisis de equilibrios y su significado económico. Es una oportunidad para sintetizar el conocimiento adquirido y validar la habilidad no solo de "hacer"matemáticas, sino también de "saberz "ver"sus implicaciones en el mundo real.

6.1. Enunciado del Problema

Considere el modelo de eficiencia de un proceso de producción donde la tasa de cambio de la producción (Q) con respecto al capital (K) depende de la relación entre la producción y el capital de la siguiente forma:

$$\frac{dQ}{dK} = \frac{Q^2 - 2KQ}{K^2}$$

(a) Demuestre que esta ecuación es homogénea de primer orden.

(b) Resuelva la ecuación diferencial para encontrar la función $Q(K)$.

(c) Si la economía busca una trayectoria de producción que mantenga una relación constante $Q/K = c^*$, ¿existe algún valor de c^* que sea un equilibrio para esta dinámica? Si es así, ¿cuál es?

(d) Interprete económicamente el significado de este equilibrio.

6.2. Solución Escalona del Problema

(a) **Demostración de homogeneidad:**

a) Dividir el numerador y el denominador de la expresión $\frac{Q^2-2KQ}{K^2}$ por K^2:

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dK} &= \frac{(Q^2/K^2) - (2KQ/K^2)}{(K^2/K^2)} \\ &= \frac{(Q/K)^2 - 2(Q/K)}{1} \\ &= (Q/K)^2 - 2(Q/K)\end{aligned}$$

b) Dado que el lado derecho es una función de Q/K, $F(Q/K) = (Q/K)^2 - 2(Q/K)$, la ecuación es **homogénea de primer orden**.

(b) **Resolución de la EDO:**

a) **Sustitución:** Plantear $v = Q/K \implies Q = vK$. Derivar Q con respecto a K usando la regla del producto: $\frac{dQ}{dK} = v + K\frac{dv}{dK}$.

b) **Transformación a Variables Separables:** Sustituir en la EDO original:

$$\begin{aligned}v + K\frac{dv}{dK} &= v^2 - 2v \\ K\frac{dv}{dK} &= v^2 - 3v \\ \frac{dv}{v(v-3)} &= \frac{dK}{K}\end{aligned}$$

c) **Integración:** Integrar ambos lados. Para el lado izquierdo, usar fracciones parciales: $\frac{1}{v(v-3)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v-3}$. $1 = A(v-3) + Bv$. Si $v = 0 \implies 1 = -3A \implies A = -1/3$. Si $v = 3 \implies 1 = 3B \implies B = 1/3$. Entonces:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{-1/3}{v} + \frac{1/3}{v-3}\right) dv &= \int \frac{1}{K}\, dK \\ \frac{1}{3}(-\ln|v| + \ln|v-3|) &= \ln|K| + C_1 \\ \ln\left|\frac{v-3}{v}\right| &= 3\ln|K| + 3C_1\end{aligned}$$

Exponenciar ambos lados, y redefinir la constante $C = e^{3C_1}$:

$$\frac{v-3}{v} = CK^3$$

d) **Reversión de la Sustitución:** Reemplazar $v = Q/K$:

$$\begin{aligned}\frac{(Q/K)-3}{Q/K} &= CK^3 \\ \frac{Q-3K}{Q} &= CK^3 \\ Q-3K &= CK^3Q \\ Q(1-CK^3) &= 3K \\ Q(K) &= \frac{3K}{1-CK^3}\end{aligned}$$

Solución general: $Q(K) = \frac{3K}{1-CK^3}$.

(c) **Equilibrio para relación constante $Q/K = c^*$:**

a) Un equilibrio c^* ocurre cuando Q/K es constante. Si $Q = vK$ y v es constante, entonces $dv/dK = 0$.

b) Sustituir $dv/dK = 0$ en la ecuación de variables separables: $K(dv/dK) = v^2 - 3v$.

$$\begin{aligned}0 &= v^2 - 3v \\ v(v-3) &= 0\end{aligned}$$

c) Esto da dos posibles valores para v: $v_1^* = 0$ o $v_2^* = 3$.

d) Por lo tanto, los valores de c^* para los cuales existe un equilibrio son $c^* = 0$ y $c^* = 3$.

(d) **Interpretación económica:**

- $c^* = Q/K = 0$**:** Este equilibrio implica una **producción cero** con cualquier nivel de capital, o que la producción es insignificante en relación con el capital. Representa un estado de inactividad o extrema ineficiencia en el uso del capital.
- $c^* = Q/K = 3$**:** Este es un equilibrio más significativo. Sugiere que si la economía alcanza una relación de producción a capital de 3 unidades de producción por cada unidad de capital, esta proporción se **mantendrá constante** a lo largo del tiempo. Es un **estado estacionario de eficiencia relativa**, un balance ideal de producción por unidad de capital a largo plazo. Las soluciones que convergen a este equilibrio representarían trayectorias de ajuste donde la economía busca estabilizarse en esta proporción productiva.

7. Red Conceptual del Tema

La siguiente lista jerárquica resume los conceptos principales, axiomas, relaciones y secuencia lógica del cálculo del tema de Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Primer Orden.

- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)**
  - Definición: Ecuación que involucra función y sus derivadas respecto a una variable independiente.
  - Propósito: Análisis dinámico de sistemas, modelar evolución de variables.
  - Clasificación: Orden, linealidad, homogeneidad (tipos: Variables Separables, Homogéneas, Lineales, Bernoulli, Exactas).
- **Funciones Homogéneas**
  - Definición: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.
  - Grado de Homogeneidad (n): Exponente que indica cómo escala la función.

- Identificación: Sustituir $\lambda x, \lambda y$ y factorizar λ^n.

- **Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Primer Orden**
  - Definición:
    - Forma explícita: $dy/dx = F(y/x)$ (donde F es homogénea de grado 0).
    - Forma diferencial: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (donde P, Q son homogéneas del mismo grado).
  - Identificación: Reescribir como $F(y/x)$ o verificar grados de P, Q.
  - Contexto/Aplicación: Invariancia de escala, dinámica depende de proporciones.

- **Axiomas/Postulados para Solución (Existencia y Unicidad)**
  - **Existencia:** Continuidad de $f(x,y)$ (o $F(v)$) en el intervalo de interés.
  - **Unicidad:** Condición de Lipschitz en y para $f(x,y)$.
  - **Limitaciones:** Falta de Lipschitz puede llevar a no unicidad.

- **Relaciones y Aplicaciones Clave**
  - Conexión con EDO de Variables Separables: Las homogéneas se transforman en separables.
  - Conexión con EDO Lineales y de Bernoulli: Estrategia de sustitución para simplificar.
  - Interpretación Geométrica: Isoclinas son líneas rectas por el origen (pendiente constante).
  - Interpretación Económica: Dinámica de variables intensivas, rutas de crecimiento balanceado, equilibrios.
  - Soluciones Singulares: Ocurren si $F(v) - v = 0$, se pierden al dividir, deben verificarse aparte.
  - Vínculos con Cálculo: Derivadas parciales, regla del producto, integración.

- **Secuencia Lógica del Cálculo (Método de Resolución)**
  1. **Paso 1: Normalización/Identificación:** Reescribir como $dy/dx = F(y/x)$.
  2. **Paso 2: Sustitución Clave:**
     - Definir $v = y/x \implies y = vx$.
     - Derivar: $dy/dx = v + x(dv/dx)$ (usando regla del producto).
  3. **Paso 3: Transformación a Separables:** Sustituir en la EDO, reordenar a $\frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dx}{x}$.
  4. **Paso 4: Integración:** Integrar ambos lados, no olvidar la constante C.
  5. **Paso 5: Reversión de la Sustitución:** Reemplazar $v = y/x$ en la solución.
  6. **Paso 6: Solución Particular (si PVI):** Usar $y(x_0) = y_0$ para hallar C.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

toobaziti

Disclaimer: Este documento ha sido elaborado a partir de la grabación de una clase, el slide visto en clase y el texto recomendados. Puede contener errores u omisiones asociados a la calidad del audio, cortes involuntarios o dificultades de transcripción. Por favor, consúltese siempre la fuente original de la grabación si se requiere confirmación de algún detalle.

Índice

1. Propósito y Contexto **1**
1.1. Problema que Resuelven . . . 1
1.2. Utilidad y Aplicaciones en Economía . . . 1
1.3. Prerrequisitos Esenciales . . . 2
1.4. Análisis e Ideas Clave . . . 2
1.5. Conclusiones Parciales . . . 3

2. Notación y Vocabulario Clave **3**
2.1. Forma Estándar . . . 3
2.2. Símbolos y su Significado . . . 3
2.3. Convenciones . . . 4
2.4. Análisis e Ideas Clave . . . 4
2.5. Conclusiones Parciales . . . 4

3. Objeto Central y Ejemplos Básicos **4**
3.1. Definición Formal . . . 5
3.2. Componentes de la Solución (Intuición) . . . 5
3.3. Microejemplos Rápidos (sin Cálculo Explícito) . . . 5
3.4. Análisis e Ideas Clave . . . 5
3.5. Conclusiones Parciales . . . 6

4. Hipótesis y Garantías de Solución (Existencia y Unicidad) **6**
4.1. Condiciones Típicas . . . 6
4.2. Propiedades Garantizadas . . . 6
4.3. Contraejemplo Breve . . . 7
4.4. Análisis e Ideas Clave . . . 7
4.5. Conclusiones Parciales . . . 7

5. Método de Resolución: Factor Integrante **7**
5.1. Teorema Central . . . 8
5.2. Por Qué Funciona (Intuición Matemática) . . . 8
5.3. Paso a Paso Detallado (Operación por Operación) . . . 8
5.4. Fórmulas Clave . . . 9
5.5. Aplicación Práctica: Ejemplo Calculado . . . 9
5.6. Límites del Método . . . 10
5.7. Análisis e Ideas Clave . . . 10
5.8. Conclusiones Parciales . . . 11

6. Interpretación Geométrica y Económica **11**
6.1. Interpretación Geométrica: Campo de Pendientes . . . 11
6.2. Interpretación Económica de los Parámetros . . . 12
6.3. Impacto de Cambios en los Parámetros . . . 12
6.4. Analogía Hidráulica . . . 12
6.5. Análisis e Ideas Clave . . . 12
6.6. Conclusiones Parciales . . . 13

7. Casos Especiales y Variantes **13**
7.1. Casos Especiales . . . 13
7.2. Esquinas o Degeneraciones . . . 14
7.3. Con y Sin Restricción . . . 14
7.4. Análisis e Ideas Clave . . . 14
7.5. Conclusiones Parciales . . . 15

8. Conexiones y Errores Comunes **15**
8.1. Puentes con Otros Temas del Programa . . . 15
8.2. 5 Fallos Comunes al Resolver Ecuaciones y Cómo Detectarlos Rápidamente . . . 16
8.3. Análisis e Ideas Clave . . . 16
8.4. Conclusiones Parciales . . . 17

9. Práctica Esencial (Problemas Resueltos) **17**
9.1. Problema Conceptual: Memoria Inicial . . . 17
9.2. Problema Mecánico: Resolución Paso a Paso . . . 18
9.3. Problema Aplicado (Deuda Pública) . . . 19
9.4. Problema de Consolidación (Precio Ajustable a Objetivo Cambiante) . . . 19
9.5. Análisis e Ideas Clave . . . 20
9.6. Conclusiones Parciales . . . 21

10. Síntesis y Ampliación **21**
10.1. Síntesis General . . . 21
10.2. Interpretación y Chequeos Rápidos . . . 21
10.3. Análisis e Ideas Clave . . . 22
10.4. Conclusiones Parciales . . . 22

11. Red Conceptual **22**

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden: Teoría y Aplicaciones Económicas

Introducción General: El estudio de las **ecuaciones diferenciales lineales de primer orden** es fundamental en diversas disciplinas científicas y, particularmente, en la economía [1]. Estas herramientas matemáticas permiten modelar cómo una variable cambia a lo largo del tiempo, influenciada tanto por su propio nivel actual como por fuerzas externas [1]. Su simplicidad estructural, unida a la posibilidad de obtener **soluciones en forma cerrada**, las convierte en un pilar para comprender y predecir la dinámica de sistemas económicos complejos [1]. Desde el ajuste de precios hasta la evolución de la deuda pública o la acumulación de capital, estas ecuaciones ofrecen un marco analítico transparente para desentrañar los procesos de ajuste hacia el equilibrio [1]. Este documento busca desglosar los conceptos clave, los métodos de resolución y las diversas aplicaciones de estas ecuaciones, proporcionando tanto la intuición matemática como la relevancia económica que las caracteriza [1]. Su dominio habilita un puente operativo entre la teoría matemática y la práctica económica, permitiendo cuantificar tiempos de convergencia, estados estacionarios y los efectos de políticas [1].

1. Propósito y Contexto

Introducción: Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son una **herramienta fundamental** para modelar la dinámica de variables económicas a lo largo del tiempo [2]. Su propósito principal es describir cómo una variable económica cambia cuando su ritmo de cambio actual es proporcional a su nivel y/o está influenciado por un flujo externo [2-5]. Estas ecuaciones ofrecen un **marco transparente** para modelar la dinámica económica, permitiendo predecir trayectorias futuras y evaluar el impacto de distintas políticas que puedan alterar los parámetros del sistema [2-5]. En esencia, resuelven el problema de comprender procesos de ajuste hacia el equilibrio, donde existen fuerzas de "fuga.º .ªcumulación"proporcionales al nivel de la variable, así como la influencia de "fuerzas externas"que impulsan el sistema [2-5]. La linealidad de estas ecuaciones facilita la obtención de **soluciones en forma cerrada**, lo que a su vez permite una interpretación clara de los **decaimientos/explosiones exponenciales** y las **trayectorias forzadas** por los términos exógenos [2-4].

1.1. Problema que Resuelven

El problema central que abordan estas ecuaciones es cómo cuantificar y describir el cambio de una variable económica a lo largo del tiempo, cuando su tasa de cambio depende directamente de su valor actual y de factores externos [6]. Esto es crucial para entender fenómenos donde las variables económicas no permanecen estáticas, sino que evolucionan [6]. La utilidad radica en su capacidad para modelar procesos de **ajuste hacia un equilibrio** [3, 6]. Permiten capturar la ïnercia.º "fricción.en el ajuste, así como la respuesta a perturbaciones o "fuerzas.externas que impulsan al sistema [3, 6]. En esencia, permiten determinar la trayectoria futura de una variable a partir de su estado actual y las fuerzas que actúan sobre ella [6].

1.2. Utilidad y Aplicaciones en Economía

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son versátiles y se aplican en una amplia gama de contextos económicos [7-10]:

- **Ajuste parcial de precios/ingreso:** Modelan cómo variables como el precio $P(t)$ o el ingreso nacional $Y(t)$ convergen exponencialmente hacia un nivel objetivo o de equilibrio [7-12]. Por ejemplo, $P'(t) = 0{,}5[100 - P(t)]$ describe cómo un precio se ajusta con el tiempo hacia un valor de equilibrio [7, 9, 10].
- **Dinámica de la deuda pública:** Permiten analizar la evolución de la deuda $D(t)$ considerando una tasa de interés y un servicio (pago) constante o variable [7-12]. Un ejemplo es $D'(t) = 0{,}04D(t) - 10$ [7, 9, 10].
- **Acumulación de capital:** Describen cómo el capital $K(t)$ se acumula o deprecia, considerando los flujos de inversión [7, 8, 10, 12]. Un ejemplo es $K'(t) = 80 - 0{,}1K(t)$ [7, 10].

- **Gestión de inventarios:** Modelan la dinámica de los niveles de inventario $Q(t)$ con producción, demanda y merma [7, 8, 10, 12]. Por ejemplo, $Q'(t) = 50 - 30 - 0{,}05Q(t)$ [7, 10].
- **Ajuste del ingreso nacional:** Versiones continuas del modelo gasto-ingreso que modelan la convergencia del ingreso hacia un nivel de equilibrio [7, 10, 12].
- **Oferta monetaria:** Modelan la oferta monetaria con inyecciones y retiros proporcionales [7, 10].
- **Inflación con shocks estacionales:** Ejemplos avanzados que incorporan fluctuaciones periódicas en la tasa de inflación [7, 10].

1.3. Prerrequisitos Esenciales

Para comprender y trabajar eficazmente con estas ecuaciones, es crucial dominar varios conceptos matemáticos fundamentales [11, 13-15]:

- La **derivada** ($y' \equiv \frac{dy}{dt}$), que representa la tasa de cambio de una función y es central para describir la dinámica [11, 13, 15].
- La **continuidad de funciones** $P(t)$ y $Q(t)$, condición necesaria para la existencia y unicidad de la solución [11, 13, 15].
- El cálculo de **integrales definidas e indefinidas**, esenciales para el método de resolución [11, 13, 15].
- El manejo de la **función exponencial** (e^x), omnipresente en sus soluciones [11, 13, 15].
- La comprensión de las **condiciones iniciales** ($y(t_0) = y_0$), que definen un Problema de Valor Inicial (PVI) y permiten encontrar una solución particular única [10, 11, 13, 15-17].
- El concepto de **factor integrante** ($\mu(t) = e^{\int P}$), la herramienta clave para la resolución de estas ecuaciones lineales [11, 13, 15, 16, 18].
- La **estructura de la solución general** como la suma de una solución particular y una solución homogénea [11, 13-15, 19].

1.4. Análisis e Ideas Clave

La esencia de estas ecuaciones radica en su capacidad para describir sistemas dinámicos donde las fuerzas internas de ajuste (proporcionales al nivel de la variable) compiten o se combinan con fuerzas externas que impulsan el sistema [20-22]. La **linealidad** es una propiedad poderosa, ya que permite obtener soluciones exactas y explícitas, facilitando una interpretación económica clara de cómo las variables se ajustan o divergen exponencialmente [9, 18, 20-23]. Esto es particularmente útil para economistas y formuladores de políticas, quienes pueden prever la evolución de variables cruciales y evaluar el impacto de sus decisiones [20-22]. La "memoria"del sistema, es decir, la influencia de la condición inicial, decae exponencialmente con el tiempo si hay un factor de "fricción.º ajuste positivo, lo que significa que el comportamiento a largo plazo está determinado por las fuerzas exógenas y los parámetros estructurales [20, 24-37].

- Las EDO lineales modelan la **dinámica de ajuste y acumulación** de variables económicas [2, 3].
- Permiten **predecir trayectorias futuras** y **evaluar el impacto de políticas** [2-5].
- La **linealidad** facilita la obtención de soluciones en forma cerrada y su interpretación [2-4, 18].
- Resuelven el problema de **ajuste hacia el equilibrio** bajo fuerzas internas y externas [3, 6].
- La **memoria inicial** del sistema (condición inicial) tiende a desaparecer si hay fricción positiva [20, 24-37].

1.5. Conclusiones Parciales

En resumen, las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son un **pilar metodológico** en el análisis dinámico económico [38]. Su capacidad para modelar el ajuste y la acumulación de variables a lo largo del tiempo, junto con la transparencia que ofrecen sus soluciones en forma cerrada, las convierte en herramientas invaluables [38]. Permiten traducir conceptos económicos abstractos, como el equilibrio o la respuesta a shocks, en expresiones matemáticas concretas y predecibles [38]. El dominio de sus fundamentos y aplicaciones es esencial para cualquier analista que busque comprender y proyectar la evolución de sistemas económicos complejos, desde micro-ajustes de precios hasta la macro-dinámica de la deuda pública o el capital [38]. Estas ecuaciones son la base para entender cómo las economías se mueven de un estado a otro [38].

2. Notación y Vocabulario Clave

Introducción: La claridad y la consistencia en la notación son fundamentales al trabajar con ecuaciones diferenciales lineales de primer orden [39]. Una **notación estándar** facilita la comunicación, el entendimiento y la aplicación de los métodos de resolución [39-42]. La forma canónica de estas ecuaciones encapsula los componentes esenciales del modelo, cada uno con un significado específico y, en el contexto económico, con unidades y dominios particulares [39]. Comprender este vocabulario es el primer paso para interpretar correctamente la dinámica que la ecuación busca describir y para evitar errores de formulación o dimensionales [39]. A continuación, se detallan los símbolos clave y las convenciones asociadas, siguiendo la forma más utilizada en la literatura [39].

2.1. Forma Estándar

La **forma estándar** de una ecuación diferencial lineal de primer orden es [14, 17, 43-46]:

$$y'(t) + P(t)y(t) = Q(t) \tag{1}$$

Es crucial que el coeficiente de $y'(t)$ sea 1; de no ser así, la ecuación debe normalizarse dividiendo todos los términos por dicho coeficiente [29, 43, 47-54]. Esto es un error muy común, especialmente en ecuaciones de deuda como $D' = rD - s$ que deben reordenarse a $D' - rD = -s$ [29, 43, 47-54]. Sin esta normalización, el factor integrante y la solución obtenida serán incorrectos [43].

2.2. Símbolos y su Significado

Cada símbolo en la forma estándar tiene un rol específico y una interpretación precisa, crucial para la modelización y el análisis económico [44-46, 55, 56]:

- t: Representa el **tiempo**, la variable independiente del modelo [44-46, 55, 56]. Sus unidades pueden ser años, trimestres, días, u otra unidad de tiempo relevante, y su dominio suele ser $\mathbb{R}$ o un intervalo específico [44-46, 55, 56]. En economía, esto define el horizonte temporal del análisis [55].
- $y(t)$: Es la **variable de interés** o función incógnita, cuya dinámica se busca describir [44-46, 55, 56]. Puede representar conceptos económicos como el precio, capital, deuda, inventario o ingreso [44-46, 55, 56]. Sus unidades son las propias de la variable que modela (e.g., dólares, unidades físicas), y es una función real [44-46, 55, 56].
- $P(t)$: Es el **coeficiente proporcional** del término $y(t)$ [44-46, 55, 56]. En el contexto económico, a menudo representa una tasa de ajuste, una tasa de depreciación, o una tasa de disipación o amplificación del sistema [44-46, 55, 56]. Sus unidades son el **inverso del tiempo** (1/tiempo), y se asume que es una función continua [44-46, 55, 56]. Un $P(t) > 0$ implica una "fricción.º fuerza que tiende a reducir la variable, mientras que un $P(t) < 0$ implica una amplificación [55].
- $Q(t)$: Es el **flujo exógeno** o "fuerza"que impulsa el sistema [44-46, 55, 56]. Representa entradas externas como demanda autónoma, inyecciones de capital, impuestos netos, o superávit primario [44-46, 55, 56]. Sus unidades son las de $y(t)$ **por unidad de tiempo** (unid(y)/tiempo), y también se asume que es una función continua [44-46, 55, 56].

- y_0: Indica la **condición inicial** de la variable $y(t)$, es decir, su valor en el instante inicial t_0 [44, 45, 55, 57]. Este valor es fundamental para determinar la solución particular única del problema [55].
- t_0: Es el **instante inicial** en el que se conoce la condición de y_0 [44, 45, 55, 57].
- $\mu(t)$: Es el **factor integrante**, una función crucial para la resolución de estas ecuaciones, definida como $\mu(t) = e^{\int P(s)ds}$ o $\mu(t) = e^{\int P(x)dx}$ [44, 45, 55, 57].

2.3. Convenciones

Para mantener la coherencia y la legibilidad en la notación matemática y sus aplicaciones, se utilizan las siguientes convenciones [57-60]:

- Las **derivadas** se denotan indistintamente como y', $\dot{y}$, o $\frac{dy}{dt}$ [57-60].
- El **logaritmo natural** se escribe como ln [57-60].
- Los **parámetros positivos** suelen denotarse con letras como $a, b, r, \delta > 0$ [57-60]. Cuando P y Q son constantes, se utilizan a y b para mayor claridad en las fórmulas, resultando en la forma $y' + ay = b$ [47, 58-64].

2.4. Análisis e Ideas Clave

La notación no es meramente una formalidad; es un **lenguaje que codifica la información del modelo** [65]. La **consistencia dimensional** es una poderosa herramienta de chequeo [29, 51, 65-73]. Por ejemplo, si $P(t)$ no tiene unidades de 1/tiempo, la ecuación no es dimensionalmente consistente y el modelo podría estar mal formulado [29, 51, 65-73]. De manera similar, si $Q(t)$ no tiene unidades de la variable $y(t)$ por unidad de tiempo, la ecuación no tiene sentido físico o económico [29, 51, 65-73]. La elección de $P(t)$ y $Q(t)$ como funciones del tiempo, en lugar de constantes, permite una mayor flexibilidad para modelar escenarios económicos donde las tasas de ajuste o los flujos exógenos cambian con el tiempo, reflejando la complejidad inherente de los sistemas económicos reales [65].

- La **forma estándar** es crucial para la correcta aplicación del método [43, 51-53].
- Cada **símbolo** tiene un significado económico y unidades específicas [44-46, 55, 56].
- La **consistencia dimensional** es una validación fundamental del modelo [51, 65, 71-73].
- La **notación clara** facilita la interpretación económica de los resultados [74].

2.5. Conclusiones Parciales

El dominio de la notación y el vocabulario asociado a las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es un paso ineludible hacia su comprensión profunda y aplicación efectiva [74]. La **forma estándar** $y'(t) + P(t)y(t) = Q(t)$ es el punto de partida, y cada uno de sus componentes (la variable de interés, el coeficiente proporcional, el flujo exógeno, y las condiciones iniciales) posee una interpretación económica y unidades específicas [74]. La claridad en estas definiciones no solo garantiza el rigor matemático, sino que también facilita la traducción de los resultados del modelo a intuiciones económicas significativas, permitiendo a los analistas construir y validar modelos dinámicos con precisión [74]. Sin una notación clara, la complejidad de los modelos económicos sería inmanejable [74].

3. Objeto Central y Ejemplos Básicos

Introducción: Una vez establecida la notación, es crucial comprender la **definición formal** de una ecuación diferencial lineal de primer orden y su comportamiento fundamental [75]. Estas ecuaciones, a pesar de su aparente simplicidad, capturan dinámicas complejas que son ubiquitarias en los modelos económicos [75]. Su **estructura inherente** permite una descomposición de la solución en componentes que tienen interpretaciones claras: una **tendencia forzada** por los impulsos externos y una **memoria inicial** que se desvanece con el tiempo bajo ciertas condiciones [36, 75, 76]. La intuición detrás de esta descomposición se puede ilustrar con **microejemplos sin necesidad de cálculos complejos**, revelando cómo operan en contextos económicos reales [36, 75, 76].

3.1. Definición Formal

Una **EDO lineal de primer orden** se define como una ecuación de la forma $y'(t) + P(t)y(t) = Q(t)$ con $P(t)$ y $Q(t)$ funciones dadas (generalmente continuas), donde la variable y aparece únicamente en grado 1 y sin productos con su derivada y' [4, 17, 57, 61, 70, 77]. Esta linealidad es lo que permite un método de resolución sistemático y la obtención de soluciones en forma cerrada [77]. La ecuación es considerada **homogénea** cuando $Q(t)$ es idénticamente cero, y **no homogénea** en caso contrario [17, 70, 77].

3.2. Componentes de la Solución (Intuición)

La solución de estas ecuaciones se puede interpretar fundamentalmente como una combinación de dos partes [8, 19, 25, 26, 30, 36]:

- Una **"tendencia forzada"**: Esta es la **solución particular** (y_p), influenciada directamente por el término exógeno $Q(t)$ (la "fuerza.º ïmpulso.externo) [8, 19, 26, 30]. Describe el comportamiento de la variable a largo plazo bajo la influencia de factores externos persistentes [30].
- Una **"memoria inicial"**: Esta es la **solución homogénea** (y_h), que depende de la condición inicial $y(t_0) = y_0$ y decae exponencialmente si $P(t) > 0$ (lo que implica un çoeficiente de fricción"positivo) [8, 19, 26, 30]. Refleja cómo la condición de partida del sistema influye en su trayectoria transitoria, pero esta influencia se disipa con el tiempo [24-28, 30, 33-37].

En esencia, el sistema recuerda"su punto de partida, pero si hay fuerzas de ajuste (fricción), esa memoria se "borra"gradualmente, y el sistema tiende hacia el comportamiento dictado por las fuerzas externas y los parámetros del modelo [24-28, 30, 33-37].

3.3. Microejemplos Rápidos (sin Cálculo Explícito)

Para una intuición rápida sobre la aplicación de estas ecuaciones en economía, sin necesidad de realizar cálculos complejos [4, 25, 36, 78]:

- **Ajuste de inventarios:** La ecuación $I'(t) + aI(t) = S$ describe cómo el nivel de inventario $I(t)$ cambia con el tiempo. Aquí, S representa las compras objetivo o el flujo de reposición. Si el coeficiente a es positivo ($a > 0$), el inventario **converge hacia un nivel de equilibrio** S/a [4, 25, 36, 78].
- **Ingreso nacional con ajuste parcial:** Un modelo como $Y'(t) + \lambda Y(t) = \lambda \bar{Y}$ (donde $\bar{Y}$ es el ingreso objetivo) ilustra un çierre de brecha"(gap closing) del ingreso nacional $Y(t)$ hacia su nivel de equilibrio $\bar{Y}$ [4, 25, 36, 78].
- **Dinámica de la deuda con interés y superávit:** La evolución de la deuda pública puede modelarse como $D'(t) + rD(t) = G - T$, donde r es la tasa de interés real y $G - T$ es el déficit primario [4, 25, 36, 78]. Si $G - T < 0$, lo que implica un superávit primario, la deuda **converge a un valor negativo** $(G - T)/r < 0$ [4, 25, 36, 78].

3.4. Análisis e Ideas Clave

La ïdea fuerzaçentral es que estas ecuaciones modelan una **"pelea"** [24, 27, 31, 34, 37, 67, 79]. Por un lado, está la **memoria del sistema** (la solución homogénea), que intenta mantener el estado inicial [31]. Por otro lado, están los **empujes externos** (la solución particular), que intentan llevar al sistema hacia un nuevo comportamiento [31]. Si el coeficiente $P(t)$ es positivo, la "fricción.º fuerza de ajuste es dominante, y la memoria inicial se desvanece exponencialmente, dejando que la trayectoria forzada por $Q(t)$ determine el comportamiento a largo plazo [31].

- La **linealidad** es una propiedad clave que permite la superposición de efectos (memoria y forzamiento) [4, 8, 23, 32].
- Los sistemas con $P(t) > 0$ o un coeficiente de ajuste positivo tienden a la **estabilidad**, lo que significa que convergen a un equilibrio [14, 32, 45, 59, 80-83].
- La **condición inicial** influye en la **trayectoria transitoria**, pero no en el comportamiento de largo plazo, si el sistema es estable [24, 25, 27, 28, 32].

- Los **términos exógenos** ($Q(t)$) o las fuerzas externas determinan la **tendencia forzada** o el estado estacionario a la que converge el sistema [8, 19, 23-28, 32].

3.5. Conclusiones Parciales

El estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden revela un marco poderoso para comprender la evolución de sistemas dinámicos [84]. Su objeto central es describir la interacción entre la **inercia inherente de una variable** y las **influencias externas constantes o cambiantes** [84]. A través de la descomposición en una solución homogénea (memoria) y una particular (forzada), se puede apreciar cómo la condición inicial gradualmente cede su influencia ante el comportamiento dictado por los parámetros estructurales y los flujos exógenos [84]. Estos microejemplos económicos, libres de cálculo explícito, demuestran que la intuición matemática subyacente se traduce directamente en patrones económicos de convergencia o divergencia, sentando las bases para análisis más rigurosos [84].

4. Hipótesis y Garantías de Solución (Existencia y Unicidad)

Introducción: La validez y la fiabilidad de cualquier modelo matemático dependen de las **condiciones bajo las cuales sus soluciones están bien definidas** [85]. Para las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, esto se traduce en asegurar la **existencia y unicidad** de la solución para un Problema de Valor Inicial (PVI) [59, 85, 86]. Sin estas garantías, las predicciones del modelo serían ambiguas o inexistentes, restando valor a su aplicación en escenarios económicos [85]. Esta sección explora las hipótesis fundamentales que sustentan estas propiedades, destacando su importancia y mostrando, mediante un contraejemplo, las consecuencias de su incumplimiento [85].

4.1. Condiciones Típicas

Para garantizar que un Problema de Valor Inicial (PVI) de una ecuación diferencial lineal de primer orden tenga una solución bien definida, se establecen **condiciones típicas** sobre las funciones $P(t)$ y $Q(t)$ [63, 64, 70, 87-89]. La condición más fundamental es que $P(t)$ **y** $Q(t)$ **deben ser continuas** en un intervalo I que contenga el instante inicial t_0 [17, 63, 64, 70, 87-89]. Esta condición es crucial porque la linealidad de la ecuación y la continuidad de P y Q implican automáticamente la **condición de Lipschitz** en y [59, 63, 64, 87]. La condición de Lipschitz es una propiedad de regularidad que, en este contexto, es una garantía poderosa de la unicidad de la solución, evitando que múltiples trayectorias pasen por el mismo punto inicial [63, 64, 87]. Esta propiedad asegura que la función no cambie demasiado abruptamente, lo cual es fundamental para la predicción [87].

4.2. Propiedades Garantizadas

Estas condiciones de continuidad garantizan tres propiedades fundamentales para la solución del PVI, lo que da robustez y validez a los modelos dinámicos [88-92]:

1. **Existencia:** Asegura que hay al menos una función $y(t)$ que satisface tanto la ecuación diferencial como la condición inicial $y(t_0) = y_0$ [17, 88-92]. Sin existencia, el modelo simplemente no podría describir el fenómeno que intenta capturar [90].

2. **Unicidad:** Establece que no puede haber dos trayectorias distintas que pasen por el mismo punto (t_0, y_0) [17, 70, 88-92]. En términos prácticos, si conocemos el estado inicial de la variable económica, el modelo determina sin ambigüedad su comportamiento futuro y pasado dentro del intervalo de definición [70, 90-92]. Esto es vital para la predictibilidad de los modelos económicos y la toma de decisiones [90].

3. **Propagación (o extensión):** Implica que la solución existe y es válida en todo el intervalo I donde P y Q son continuas [88-92]. Esto significa que la solución no "desaparece.º deja de ser válida dentro del intervalo de continuidad de las funciones dadas, lo que permite analizar el sistema a lo largo de un horizonte de tiempo relevante sin interrupciones [90].

4.3. Contraejemplo Breve

La importancia de estas hipótesis se comprende mejor con un **contraejemplo** [93]. Consideremos el caso donde la función $P(t)$ no es integrable o presenta una singularidad dentro del intervalo de interés [66, 69, 93-96]. Por ejemplo, si $P(t) = 1/(t - t^*)$ con una singularidad en t^* dentro del intervalo, el factor integrante $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$ no puede definirse sin ambigüedades porque la integral de $P(t)$.[ex]plota.[en] t^* [66, 69, 93-96]. En este escenario, lo que se rompe es la existencia global de la solución: la solución puede no existir más allá de t^* o no extenderse por todo el intervalo donde se espera que se propague [66, 69, 93-96]. La capacidad de definir el factor integrante de manera clara es esencial para el método de solución, y su falla conlleva la pérdida de las garantías de existencia y unicidad en el dominio completo [69, 93, 96]. Esto significa que el modelo dejaría de ser predictivo o consistente [93].

4.4. Análisis e Ideas Clave

La **continuidad de** $P(t)$ **y** $Q(t)$ es la piedra angular de la solvencia de estas ecuaciones [97]. Imagínese querer predecir la trayectoria de un objeto, pero las fuerzas que actúan sobre él cambian de forma errática o infinita en algún punto [97]. Sería imposible hacer una predicción confiable [97]. De manera análoga, en un modelo económico, si una tasa de ajuste ($P(t)$) o un flujo exógeno ($Q(t)$) sufriera cambios bruscos o infinitos, el comportamiento de la variable económica sería impredecible [97]. La **linealidad** de la ecuación es clave aquí, ya que a diferencia de las ecuaciones no lineales, las lineales no requieren condiciones adicionales sobre la derivada de $P(t)$ o $Q(t)$ para garantizar la unicidad; la continuidad es suficiente [97].

- La **continuidad de** $P(t)$ **y** $Q(t)$ es una condición de suficiencia para existencia y unicidad de la solución [63, 64, 70, 88, 98].
- La **linealidad** de la ecuación simplifica las condiciones de Lipschitz, que garantizan la unicidad [63, 64, 98].
- Un PVI bien planteado siempre tiene una **única trayectoria**, lo que es vital para la predictibilidad de los modelos [70, 88, 91, 92, 98].
- Las **singularidades** en $P(t)$ o $Q(t)$ anulan las garantías de existencia global, limitando la validez del modelo [66, 94, 95, 98].

4.5. Conclusiones Parciales

Las hipótesis de continuidad sobre $P(t)$ y $Q(t)$ no son meros formalismos matemáticos; son los cimientos que otorgan **validez y unicidad** a las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden [99]. Estas garantías son vitales para la modelización económica, ya que permiten al analista confiar en que, dado un estado inicial, el comportamiento futuro (o pasado) de una variable económica está inequívocamente determinado por el modelo [99]. La ausencia de estas condiciones, como en el caso de singularidades, puede llevar a la imposibilidad de obtener soluciones analíticas o a la pérdida de predictibilidad del sistema, subrayando la importancia de verificar la regularidad de los coeficientes antes de proceder con la resolución [99].

5. Método de Resolución: Factor Integrante

Introducción: El **método del factor integrante** es el teorema central y la técnica más poderosa para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden [18, 94-96, 100, 101]. Su ingenio reside en transformar una ecuación que inicialmente parece difícil de integrar en una **derivada exacta de un producto**, lo que permite una integración directa y sistemática [100]. Esta sección desglosa el **procedimiento paso a paso**, explica la intuición matemática detrás de su funcionamiento y presenta un ejemplo concreto de su aplicación, detallando cada operación involucrada [100]. También se abordarán las limitaciones inherentes al método y se recordarán algunas fórmulas clave [100].

5.1. Teorema Central

Si la ecuación es de la forma $y' + P(t)y = Q(t)$, con P y Q funciones continuas, se define el **factor integrante** como $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$ [18, 26, 94-96, 101-105]. Este método garantiza que, al multiplicar la ecuación por $\mu(t)$, el lado izquierdo se convierte en la derivada de un producto, específicamente $\frac{d}{dt}[\mu(t), y(t)] = \mu(t), Q(t)$ [25, 26, 82, 95, 96, 101-106]. Integrando ambos lados y despejando $y(t)$, se obtiene la **solución general** [8, 25, 26, 82, 95, 96, 101-106]:

$$y(t) = \mu(t)^{-1}\Big(\int \mu(s)Q(s), ds + C\Big) \tag{2}$$

Para un Problema de Valor Inicial (PVI) con $y(t_0) = y_0$, la constante de integración C se determina aplicando la condición inicial a la solución general [82, 95, 101-103, 106, 107]. Específicamente, $C = y_0\mu(t_0)$ [82, 101-103].

5.2. Por Qué Funciona (Intuición Matemática)

El método del factor integrante funciona porque el factor integrante $\mu(t)$ está diseñado específicamente para que, al multiplicar la ecuación original, el lado izquierdo se transforme en una derivada exacta de un producto, aplicando la **regla de Leibniz** [1, 2, 6, 7, 18, 26, 41, 104-106, 108]. Originalmente tenemos:

$$y' + P(t)y = Q(t)$$

Multiplicando por $\mu(t)$:

$$\mu(t)y' + \mu(t)P(t)y = \mu(t)Q(t)$$

Si queremos que el lado izquierdo sea la derivada de un producto, $\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)]$, por la regla de Leibniz, sabemos que $\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t)$. Para que $\mu(t)y' + \mu(t)P(t)y$ sea igual a $\mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t)$, necesitamos que $\mu(t)P(t) = \mu'(t)$. Esto nos lleva a la ecuación diferencial para $\mu(t)$:

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = P(t)$$

Integrando ambos lados con respecto a t:

$$\int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}, dt = \int P(t), dt \implies \ln|\mu(t)| = \int P(t), dt$$

Despejando $\mu(t)$ (y asumiendo $\mu(t) > 0$ sin pérdida de generalidad):

$$\mu(t) = e^{\int P(t), dt} \tag{3}$$

Una vez obtenido $\mu(t)$, el lado izquierdo de la ecuación original multiplicada por $\mu(t)$ se convierte en $\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)]$, lo que .^absorbe.^el término proporcional en y, simplificando la ecuación a una forma que puede integrarse directamente [1, 2, 6, 8, 13, 108].

5.3. Paso a Paso Detallado (Operación por Operación)

Para resolver una ecuación de la forma $y' + P(t)y = Q(t)$ con una condición inicial $y(t_0) = y_0$ [109]:

1. **Verificar forma estándar:** Asegurarse de que el coeficiente de y' sea 1 [29, 47-54, 109]. Si no, dividir toda la ecuación por el coeficiente de y' [29, 47-54, 109].

2. **Calcular el factor integrante ($\mu(t)$):** Se identifica $P(t)$ y se calcula la integral $\int P(t), dt$. Luego, $\mu(t)$ se obtiene elevando e a esa integral: $\mu(t) = e^{\int P(t), dt}$ [20, 29, 47-49, 109]. Asegurarse de integrar $P(t)$ correctamente y prestar atención al signo, ya que un error en el signo del exponente es muy común y altera drásticamente la solución [20, 29, 47-49, 51, 52, 109, 110].

3. **Multiplicar la ecuación por el factor integrante:** Multiplicar cada término de la ecuación $y' + P(t)y = Q(t)$ por $\mu(t)$ [6, 56, 101, 106, 107, 109, 111, 112].

4. **Reconocer la derivada de un producto:** El lado izquierdo de la ecuación transformada es ahora la derivada exacta del producto de $\mu(t)$ y $y(t)$: $\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)Q(t)$ [6, 56, 101, 106, 107, 109, 111, 112].

5. **Integrar ambos lados:** Integrar ambos lados de la ecuación con respecto a t: $\int \frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)], dt = \int \mu(t)Q(t), dt \implies \mu(t)y(t) = \int \mu(t)Q(t), dt + C$ [20, 29, 47, 48, 56, 68, 109, 112]. Es crucial no olvidar la constante de integración C en este paso [20, 29, 47, 48, 51, 52, 68, 109, 110].

6. **Despejar $y(t)$:** Dividir toda la expresión por $\mu(t)$ para obtener la solución general explícita para $y(t)$: $y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\Big(\int \mu(t)Q(t), dt + C\Big)$ [56, 109, 112].

7. **Aplicar la condición inicial ($y(t_0) = y_0$):** Sustituir el valor de t_0 y y_0 en la solución general obtenida en el paso 6 y despejar el valor numérico de la constante C [6, 38, 51-53, 101, 106, 107, 109, 112]. Esto garantiza que la solución particular encontrada pase por el punto inicial dado [109].

5.4. Fórmulas Clave

- **Solución general para $y' + P(x)y = Q(x)$:** [8, 19, 20, 110, 111, 113]

$$\boxed{y(x) = e^{-\int P(x), dx}\Big(\int e^{\int P(x), dx} Q(x), dx + C\Big)} \tag{4}$$

- **Solución para coeficientes constantes $y' + ay = b$:** [27, 38, 39, 43, 55, 113, 114]

$$\boxed{y(x) = \frac{b}{a} + C, e^{-ax}} \tag{5}$$

  Esta es una de las fórmulas más utilizadas en las aplicaciones económicas debido a su simplicidad y la claridad de su interpretación [38, 39, 43, 55, 113-115].

- **Con PVI $y(0) = y_0$ para coeficientes constantes:** [38, 39, 43, 55, 113, 116]

$$\boxed{y(x) = \frac{b}{a} + \Big(y_0 - \frac{b}{a}\Big)e^{-ax}} \tag{6}$$

5.5. Aplicación Práctica: Ejemplo Calculado

Resolver la ecuación: $y' + 2y = e^{-x}$, con $y(0) = 0$ [117, 118].

1. **Diagnóstico:** Es una ecuación lineal de primer orden en forma estándar, con $P(x) = 2$ y $Q(x) = e^{-x}$ [117, 118]. Ambas funciones son continuas en $\mathbb{R}$, lo que garantiza existencia y unicidad global de la solución del Problema de Valor Inicial (PVI) [58, 117, 118].

2. **Factor integrante ($\mu(x)$):** Se identifica $P(x) = 2$ [117, 119].

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int P(x), dx} \\ &= e^{\int 2, dx} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

3. **Multiplicar la ecuación por $\mu(x)$:** [107, 112, 117]

$$\begin{aligned} e^{2x}y' + 2e^{2x}y &= e^{2x}e^{-x} \\ e^{2x}y' + 2e^{2x}y &= e^{x} \end{aligned}$$

4. **Reconocer la derivada de un producto:** El lado izquierdo es la derivada del producto de $\mu(x)$ y $y(x)$, es decir, $\dfrac{d}{dx}\big(e^{2x}y\big)$ [107, 112, 117].

$$\frac{d}{dx}\big(e^{2x}y\big) = e^{x}$$

5. **Integrar ambos lados:** [107, 112, 117]

$$\int \frac{d}{dx}(e^{2x}y), dx = \int e^x, dx$$
$$e^{2x}y = e^x + C$$

6. **Despejar** $y(x)$**:** [107, 112, 117]

$$y(x) = \frac{e^x + C}{e^{2x}}$$
$$y(x) = e^x e^{-2x} + C, e^{-2x}$$
$$y(x) = e^{-x} + C, e^{-2x}$$

7. **Aplicar la condición inicial** $y(0) = 0$**:** Se sustituyen $x = 0$ y $y = 0$ en la solución general para encontrar el valor de C [107, 112, 117].

$$0 = e^{-0} + C, e^{-2(0)}$$
$$0 = 1 + C$$
$$C = -1$$

8. **Solución Final:** Se sustituye el valor de C en la solución general [107, 112, 117].

$$\boxed{y(x) = e^{-x} - e^{-2x}} \tag{7}$$

Chequeos rápidos de consistencia [65, 117, 120]:

- **Sustitución directa en la ODE:** Calculamos $y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$. Luego, sustituimos en la ecuación original: $y' + 2y = (-e^{-x} + 2e^{-2x}) + 2(e^{-x} - e^{-2x}) = e^{-x}$. El resultado coincide con $Q(x)$, lo que verifica la solución.
- **Condición inicial:** Evaluamos la solución en $x = 0$: $y(0) = e^{-0} - e^{-2(0)} = 1 - 1 = 0$. La condición inicial se cumple.
- **Comportamiento asintótico:** La solución $y(x) = e^{-x} - e^{-2x}$ muestra que ambos términos decaen a cero cuando $x \to +\infty$, lo que implica $y(x) \to 0$. Esto es consistente con un sistema estable (dado el término $2y$, donde $a = 2 > 0$) y un forzamiento que también decae.

5.6. Límites del Método

Aunque el método del factor integrante es universalmente aplicable a todas las ecuaciones lineales de primer orden, su **resolución explícita** puede tener límites [1, 6, 13, 121]. Específicamente, requiere calcular las integrales $\int P(t), dt$ y $\int \mu(t)Q(t), dt$ [1, 6, 13, 121, 122]. Si estas integrales no tienen una forma cerrada o analítica (es decir, no pueden expresarse en términos de funciones elementales), la solución debe obtenerse mediante **aproximaciones numéricas** (como los métodos de Euler o Runge-Kutta) o mediante series [1, 2, 6, 13, 41, 73-75, 108, 117, 121, 122].

5.7. Análisis e Ideas Clave

La intuición detrás del factor integrante es comparable a la de una "linterna mágica"que ilumina la estructura oculta de la ecuación [123]. Al multiplicar por $\mu(t)$, lo que antes eran dos términos separados (y' y $P(t)y$) se fusionan en uno solo, que es la derivada de un producto [123]. Desde una perspectiva económica, esta "fusión"nos permite entender cómo la tasa de cambio de la variable de interés se acumula a lo largo del tiempo, no solo por el flujo externo, sino también por la interacción con su propio nivel [123]. La **solución general** nos muestra cómo la influencia de la condición inicial (a través de C) se "mezclaçon la respuesta forzada por los términos exógenos, y cómo esta influencia se desvanece si el sistema es estable [4, 8, 19, 28, 77, 123].

- El factor integrante **re-empaca** la ecuación para su integración directa, simplificando el proceso de resolución [1, 8, 111, 124].

- La solución es la suma de la **respuesta homogénea** (memoria del sistema) y la **respuesta particular** (parte forzada por $Q(t)$) [4, 8, 19, 28, 77, 124].
- La **constante de integración** C es crucial y se determina aplicando la condición inicial del PVI [20, 29, 47, 48, 68, 124].
- El método es **universal** para este tipo de ecuaciones, pero la integración explícita de las funciones puede ser un límite práctico [1, 6, 13, 124].

5.8. Conclusiones Parciales

El método del factor integrante representa la columna vertebral de la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden [125]. Su poder radica en su capacidad para transformar una ecuación aparentemente compleja en una forma directamente integrable, revelando la estructura subyacente de la solución [125]. Aunque requiere un dominio sólido del cálculo integral, la lógica paso a paso es sistemática y reproducible [125]. Las fórmulas resultantes, especialmente para el caso de coeficientes constantes, ofrecen una visión inmediata de los equilibrios y las velocidades de ajuste [125]. Reconocer sus límites, particularmente en la integrabilidad de funciones, es igualmente importante para decidir cuándo recurrir a métodos numéricos, asegurando así la robustez del análisis [125].

6. Interpretación Geométrica y Económica

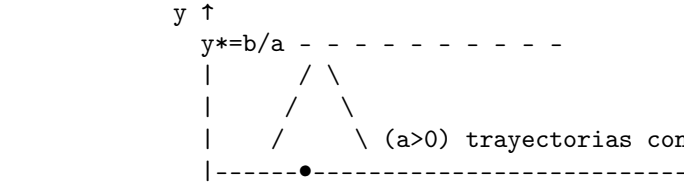
Introducción: Las ecuaciones diferenciales no solo ofrecen soluciones analíticas; también proporcionan una rica **interpretación visual y conceptual** de la dinámica de los sistemas [126]. La **interpretación geométrica** permite visualizar las trayectorias de las variables a través de campos de pendientes y puntos de equilibrio [126]. Mientras que la **interpretación económica** traduce estos conceptos matemáticos en fenómenos del mundo real [126]. Comprender cómo los parámetros de la ecuación influyen en la forma de las soluciones es fundamental para extraer conocimientos significativos de los modelos y para predecir el comportamiento de variables económicas en escenarios diversos, traduciendo la abstracción matemática a realidades concretas [126].

6.1. Interpretación Geométrica: Campo de Pendientes

La interpretación geométrica de estas ecuaciones se visualiza a través del **campo de pendientes** [13, 30, 39, 45, 50, 54, 78, 127, 128]. En un gráfico con el tiempo (t) en el eje horizontal y la variable de interés (y) en el eje vertical, la ecuación $y'(t) + P(t)y(t) = Q(t)$ (o su forma autónoma $y' + ay = b$) define la **pendiente de la trayectoria** de $y(t)$ en cada punto (t, y) [13, 30, 45, 50, 78, 127, 128]. Para el caso autónomo con coeficientes constantes $y' + ay = b$:

- Las **isoclinas** (curvas donde la pendiente y' es constante) son **horizontales** [13, 30, 45, 54, 78, 127, 128].
- La pendiente en cada altura y es $y' = b - ay$ [13, 30, 45, 78, 127, 128].
- Un elemento clave es la recta horizontal $y^* = b/a$, que representa el **punto fijo o equilibrio de estado estacionario** del sistema [14, 39, 45, 50, 54, 78, 80, 114, 127, 128].
- Si $a > 0$, las flechas del campo de pendientes apuntan **hacia** y^*, indicando **estabilidad** [14, 37, 39, 45, 50, 54, 78, 80, 83, 127, 128]. Esto significa que las trayectorias convergen hacia y^* a medida que el tiempo avanza, acercándose asintóticamente a la recta $y = b/a$ [14, 39, 45, 127].
- Si $a < 0$, las flechas se alejan de y^*, señalando **inestabilidad** [14, 39, 45, 50, 54, 78, 80, 127-129]. Las trayectorias divergen de y^* y se alejan indefinidamente del equilibrio [14, 39, 45, 127].

Mini-mapa visual (campo de pendientes) [24, 37, 50, 127]:



6.2. Interpretación Económica de los Parámetros

La interpretación económica traduce estos conceptos matemáticos en fenómenos económicos concretos, asignando significado a los coeficientes de la ecuación [2, 45, 54, 78, 80, 111, 130]:

- El término ay (o $P(t)y(t)$) se comporta como una **fuerza de ajuste** o **fricción** [2, 31, 45, 54, 78, 80, 111, 130]. Puede representar costos asociados a la desviación del equilibrio (ajuste de precios [2, 76, 116, 130]), depreciación del capital [2, 76, 86, 130, 131], el pago de intereses sobre la deuda [2, 32, 76, 130, 132], o una propensión a corregir desviaciones [130]. Sus unidades son 1/tiempo [46, 56, 66, 67, 72, 81, 111, 130].
- El término b (o $Q(t)$) es un **impulso sostenido** o un **flujo exógeno** [2, 31, 45, 54, 66, 78, 80, 84, 111, 130]. En economía, esto podría ser una política fiscal, una demanda autónoma, una inversión constante, o un servicio de deuda fijo [25, 48, 130]. Sus unidades son las de $y(t)$ por unidad de tiempo [46, 56, 66, 67, 72, 81, 111, 130].

6.3. Impacto de Cambios en los Parámetros

Los cambios en los parámetros tienen implicaciones claras en la dinámica económica y en las trayectorias de las variables [28, 78, 84, 133]:

- Un **aumento de a (si $a > 0$) acelera la convergencia** de las trayectorias hacia el equilibrio [28, 45, 78, 84, 85, 116, 128, 132, 133]. Las curvas se vuelven más empinadas al inicio [128, 133]. La velocidad de ajuste es mayor, y el "tiempo característico"$(1/a)$ y la "vida media"$(\ln 2/a)$ se reducen, indicando un ajuste más rápido [15, 23, 50, 84, 85, 87, 115, 132-134]. Sin embargo, un cambio en a por sí solo no altera el nivel de largo plazo b/a si b no cambia proporcionalmente [45, 78, 84, 128, 133].
- Un **aumento de b desplaza la trayectoria hacia un nuevo equilibrio** b/a, que será más alto si $a > 0$ [28, 45, 78, 84, 128, 133]. Esto implica que un mayor impulso sostenido conduce a un nivel de equilibrio superior para la variable [133]. El ajuste transitorio hacia este nuevo equilibrio estará determinado por la condición inicial y_0 [45, 78, 84, 133].

6.4. Analogía Hidráulica

Para una intuición más sencilla sobre el comportamiento de estas ecuaciones, considere la **analogía hidráulica** de un tanque [135, 136]:

- El **nivel del agua** en el tanque es $y(t)$ [135, 136].
- Hay una **fuga** proporcional al nivel (válvula abierta en el fondo): esta es la tasa de salida $P(t)y(t)$ [135, 136].
- Hay una **bomba** que inyecta agua al tanque a una razón $Q(t)$ [135, 136].

La ecuación de balance del nivel del agua es $y'(t) = Q(t) - P(t)y(t)$, que es precisamente la forma estándar de una EDO lineal de primer orden $(y' + P(t)y = Q(t))$ [135, 136]. El tanque alcanza un nivel de equilibrio cuando la inyección iguala la fuga; si la bomba cambia su caudal, el nivel del tanque se ajusta exponencialmente hacia un nuevo equilibrio [135, 136].

6.5. Análisis e Ideas Clave

La EDO lineal de primer orden describe una "peleaçonstante entre la **memoria del sistema** (la parte homogénea, que decae exponencialmente si hay "fricción"positiva) y los **empujes externos** (la parte forzada por $Q(t)$) [24, 27, 28, 34, 37, 67, 79, 137]. Lo que persiste a largo plazo es la tendencia impuesta por los parámetros y las políticas, no la condición inicial [24, 27, 28, 37, 137]. Esta lucha entre la inercia y la fuerza externa es una metáfora poderosa para innumerables fenómenos económicos, desde la forma en que los mercados reaccionan a las políticas monetarias hasta cómo las empresas ajustan sus niveles de inventario, reflejando siempre la dinámica de ajuste hacia un equilibrio [137].

- El **campo de pendientes** es una herramienta visual fundamental para comprender las trayectorias de las soluciones en el tiempo [13, 30, 50, 78, 138].

- El **equilibrio** $y^* = b/a$ es el punto de convergencia (si $a > 0$) o repulsión (si $a < 0$) del sistema [14, 50, 78, 80, 138].
- $P(t)$ se interpreta como la **fuerza de ajuste/fricción**; mientras que $Q(t)$ es el **impulso exógeno** que afecta al sistema [2, 31, 78, 80, 111, 138].
- Un mayor a (si $a > 0$) implica una **convergencia más rápida** hacia el equilibrio [28, 78, 84, 85, 138].
- Un mayor b desplaza el **equilibrio de largo plazo** a un nivel más alto (si $a > 0$) [28, 78, 84, 138].

6.6. Conclusiones Parciales

La interpretación geométrica y económica de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es tan vital como su resolución analítica [139]. La visualización a través de los campos de pendientes proporciona una comprensión intuitiva de la estabilidad y las trayectorias, mientras que la traducción de los parámetros a conceptos económicos permite un análisis práctico y profundo [139]. Entender el término $P(t)$ como una fuerza de ajuste o fricción y $Q(t)$ como un impulso exógeno transforma una expresión matemática abstracta en un modelo dinámico de fenómenos del mundo real [139]. Esta doble perspectiva enriquece significativamente la capacidad de un analista para diagnosticar el comportamiento de un sistema económico y anticipar las consecuencias de cambios en sus parámetros [139].

7. Casos Especiales y Variantes

Introducción: Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, a pesar de su forma estándar, presentan una diversidad de **casos especiales y variantes** que son importantes para una comprensión exhaustiva de su comportamiento y aplicabilidad [39, 43, 55, 140]. Estos casos simplificados o degenerados a menudo revelan características fundamentales de la dinámica del sistema, mientras que las variantes con condiciones o formas particulares demuestran la flexibilidad de la herramienta para modelar escenarios más específicos [140]. Reconocer estas formas no solo facilita la resolución, sino que también enriquece la interpretación de los fenómenos económicos que describen [140]. La capacidad de identificar estos casos simplifica el proceso de solución y permite una intuición más profunda sobre el comportamiento subyacente del modelo [140].

7.1. Casos Especiales

- **Ecuación Homogénea ($Q \equiv 0$):** Cuando el término exógeno $Q(t)$ es idénticamente cero, la ecuación se simplifica a $y' + P(t)y = 0$ [17, 39, 43, 55, 70, 141, 142]. La solución general es:

$$y(t) = C, e^{-\int P(t)dt} \tag{8}$$

  Si $P(t)$ es una constante positiva ($P \equiv a > 0$), la solución es un **decaimiento exponencial** puro, $y(t) = Ce^{-at}$ [39, 43, 55, 59, 141, 142]. Esto modela situaciones donde la variable se extingue o decae sin influencias externas constantes, como el decaimiento de una población sin nacimientos o la depreciación de un activo sin nueva inversión [39, 43, 141].

- **Coeficientes constantes ($P(t) \equiv a$, $Q(t) \equiv b$):** La ecuación es $y' + ay = b$ [27, 38, 39, 43, 55, 114, 141, 142]. La solución explícita para un PVI $y(t_0) = y_0$ es $y(t) = \frac{b}{a} + \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-a(t-t_0)}$ [27, 38, 39, 43, 55, 111, 141, 142]. Permite identificar rápidamente el equilibrio de largo plazo (b/a) y la velocidad de ajuste (a) [27, 61, 141].

- **Autónoma forzada por escalón:** Si $Q(t)$ cambia abruptamente en un momento específico τ (e.g., $Q(t) = b, \mathbf{1}_{t \geq \tau}$ donde $\mathbf{1}$ es la función indicatriz), la solución mostrará un çodo.º cambio en la trayectoria en $t = \tau$ [62, 73, 111, 141, 142]. La tasa de convergencia sigue siendo la misma antes y después del shock, pero el punto de equilibrio o la trayectoria forzada se modifica [62, 111, 141].

7.2. Esquinas o Degeneraciones

Ciertos valores de los parámetros o condiciones iniciales pueden llevar a "degeneraciones.[en] el comportamiento del sistema, que son casos límite con dinámicas particulares [45, 55, 97, 143]:

- $a = 0$ **(en el caso de coeficientes constantes):** La ecuación se reduce a $y' = b$ [45, 55, 59, 97, 142, 143]. En este caso, la solución es $y(t) = bt + C$, lo que representa un **crecimiento lineal** [45, 55, 59, 97, 142, 143]. No existe un equilibrio interno al que el sistema converja, ya que la "fricción.º el ajuste proporcional a y es nulo [45, 55, 59, 97, 142, 143].
- $b = 0$ **y** $a > 0$**:** La ecuación es $y' + ay = 0$ [45, 97-99, 143, 144]. En este caso, el equilibrio está en $y^* = 0$, y si $a > 0$, siempre es **estable**, con la solución convergiendo a cero exponencialmente [45, 97-99, 143, 144]. Esto describe una situación donde la variable se extingue si no hay inyecciones externas [143].
- $y_0 = y^*$**:** Si la condición inicial coincide con el nivel de equilibrio ($y_0 = b/a$), la trayectoria es **constante** y no hay dinámica transitoria [45, 97-99, 143, 144]. Esto ocurre porque la "memoria inicial.[es] nula (el término homogéneo $C, e^{-a(t-t_0)}$ es cero) [97, 98, 143].
- $P(t)$ **con cambio de signo:** Si el coeficiente $P(t)$ cambia de signo a lo largo del tiempo, la **estabilidad del sistema puede cambiar temporalmente** [45, 63, 97-99, 143, 144]. Esto podría llevar a una "desestabilización temporal", donde el sistema se vuelve inestable por un período antes de regresar a la estabilidad (o viceversa) [63, 97, 98, 143].

7.3. Con y Sin Restricción

A veces, las variables económicas tienen **límites institucionales o físicos** [27, 63, 99, 100, 144, 145]. Por ejemplo, el capital o el ingreso no pueden ser negativos ($y \geq 0$) [27, 63, 98-100, 145]. En estos casos, la solución analítica podría requerir recortar"la solución y analizar la **permanencia en la región factible** [63, 145]. Si la solución matemática lleva a valores que violan estas restricciones (e.g., un capital negativo en el modelo), el modelo lineal simple puede necesitar ajustes o una interpretación diferente en los límites [63, 145]. Esto es crucial en economía, donde las variables suelen estar acotadas (e.g., precios positivos, cantidades no negativas) y la aplicabilidad del modelo debe ser consistente con la realidad económica [27, 98-100, 145].

7.4. Análisis e Ideas Clave

Estos casos y degeneraciones ilustran la **versatilidad y los límites** de las ecuaciones lineales [146]. La forma de coeficientes constantes es la más utilizada en modelos básicos debido a su simplicidad y la claridad de su interpretación de equilibrio y velocidad de ajuste [38, 39, 43, 55, 115, 146]. La existencia de soluciones de crecimiento lineal cuando $a = 0$ destaca la importancia de la "fricción.º ajuste proporcional para lograr un equilibrio estable [146]. Las restricciones físicas o institucionales en variables económicas son un recordatorio de que los modelos matemáticos son abstracciones que deben validarse contra la realidad del dominio de aplicación [146].

- Los **coeficientes constantes** simplifican drásticamente la solución y la interpretación [38, 39, 43, 55, 115, 147].
- La **ecuación homogénea** describe decaimiento o crecimiento en ausencia de fuerzas externas constantes [39, 43, 55, 70, 147].
- El caso $a = 0$ implica **crecimiento lineal y ausencia de un equilibrio interno** [45, 55, 97, 147].
- Las **condiciones de partida pueden anular la dinámica transitoria** si la variable ya está en equilibrio ($y_0 = y^*$) [45, 97, 99, 147].
- Las **restricciones físicas o institucionales** pueden requerir revisión del modelo lineal simple [27, 99, 100, 147].

7.5. Conclusiones Parciales

La exploración de los casos especiales y variantes en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden enriquece significativamente nuestra comprensión de su aplicabilidad y limitaciones [148]. Desde el simple decaimiento exponencial de las ecuaciones homogéneas hasta el crecimiento lineal en ausencia de fuerzas de ajuste, cada variante revela un aspecto particular de la dinámica del sistema [148]. Estos escenarios, junto con las consideraciones sobre restricciones físicas o institucionales, demuestran que, si bien la forma estándar proporciona una base sólida, la realidad económica a menudo exige una comprensión matizada de cómo los parámetros y las condiciones iniciales interactúan para producir comportamientos diversos [148]. Un dominio de estos casos especiales permite una modelización más precisa y relevante [148].

8. Conexiones y Errores Comunes

Introducción: Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no son un concepto aislado; constituyen un **puente operativo** fundamental con otros temas clave en matemáticas y economía, tanto a nivel de curso como en aplicaciones más avanzadas [64, 99, 102, 108, 149, 150]. Comprender estas conexiones amplía la perspectiva del analista, revelando cómo un concepto aparentemente simple es el **bloque básico** de teorías más complejas [49, 52, 102, 108, 113, 149, 151]. Además, al dominar estas ecuaciones, es crucial estar consciente de los **errores comunes** que se presentan durante su resolución [149]. Identificarlos rápidamente es esencial para asegurar la precisión de los resultados y la validez de las interpretaciones económicas [149].

8.1. Puentes con Otros Temas del Programa

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son un componente esencial en una red más amplia de conocimientos, sirviendo como fundamento para el estudio de sistemas dinámicos más complejos [99, 102, 108, 152]:

- **Ecuaciones en Diferencias (EED):** Son el análogo discreto de las EDO, fundamentales para modelar fenómenos económicos en tiempo discreto [99, 102, 108, 109, 144, 151, 152]. Una EED lineal de primer orden, como $y_{t+1} - (1 - \alpha)y_t = \beta$, tiene una estructura de solución similar ($y_t = y^* + (y_0 - y^*)(1 - \alpha)^t$), donde se distingue una solución particular y una homogénea [99, 102, 113, 144, 152]. Esto resalta la **misma lógica de "particular + homogénea"** [102, 108, 113, 144, 152, 153].
- **Sistemas Lineales (2x2) y Superiores:** Al .ªpilar"dos o más ecuaciones de primer orden, se crea una dinámica conjunta que se resuelve con matrices y exponenciales de matrices ($x'(t) = Ax(t) + b(t)$) [49, 52, 73, 77, 102, 108, 109, 113, 151, 152]. Las EDO lineales de primer orden son el **bloque básico** para entender estos sistemas multidimensionales, que permiten modelar la dinámica conjunta de múltiples variables interconectadas [102, 108, 113, 152].
- **Control Óptimo / Crecimiento Económico:** La ecuación de acumulación de capital ($K' = I - \delta K$, donde I es inversión y δ es la tasa de depreciación) es un ejemplo canónico de una EDO lineal de primer orden (si I se considera dado), siendo fundamental en modelos de crecimiento económico y problemas de control óptimo [49, 52, 102, 108, 109, 113, 151, 152].
- **Ecuaciones No Lineales Reducibles a Lineales:** Algunas ecuaciones no lineales (como las de Bernoulli, $y' + Py = Qy^n$) pueden transformarse en lineales mediante una sustitución adecuada, mostrando la versatilidad del método del factor integrante [108, 109, 151, 152].
- **Estabilidad de Sistemas Dinámicos:** El signo de $P(t)$ (o los autovalores en sistemas) determina la atracción o repulsión del equilibrio, concepto fundamental en el análisis de estabilidad económica y de sistemas en general [108, 109, 151, 152].
- **Métodos Numéricos:** Cuando las integrales no tienen una forma cerrada, se utilizan métodos numéricos (como Euler o Runge-Kutta) para aproximar la solución, demostrando la conexión con la computación científica y la resolución práctica de modelos complejos [2, 73-75, 108, 117, 151, 152].

8.2. 5 Fallos Comunes al Resolver Ecuaciones y Cómo Detectarlos Rápidamente

La práctica de la resolución de estas ecuaciones está plagada de errores recurrentes que pueden invalidar los resultados [20, 47-49, 51, 100]. Conocerlos y saber cómo detectarlos es una habilidad crucial para cualquier analista [51]:

1. **No poner la ecuación en forma estándar ($y' + Py = Q$):** [29, 47-49, 51-54]
   - **Señal:** La derivada y' aparece con un coeficiente diferente de 1 (e.g., $xy' + y = x^2$ en lugar de $y' + (1/x)y = x$) [29, 47-49, 51].
   - **Cómo detectarlo:** Siempre se debe dividir toda la ecuación por el coeficiente de y' para normalizarla [29, 47-51, 54]. Este es un error muy común, especialmente en ecuaciones de deuda como $D' = rD - s$ que deben reordenarse a $D' - rD = -s$ [29, 48, 51].
2. **Factor integrante mal calculado (especialmente el signo):** [29, 47-49, 51, 52, 110]
   - **Señal:** Si se espera que la solución homogénea decaiga (es decir, el sistema sea estable, por ejemplo, cuando $a > 0$), pero la solución obtenida no lo hace [29, 47-49, 51, 70].
   - **Cómo detectarlo:** Revisar el signo en la integral $\int P(x)dx$ para el cálculo de $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ [20, 29, 47-49, 51]. Un error común es usar $e^{-\int P(x)dx}$ [51, 110].
3. **Olvidar la constante de integración C o aplicarla mal al Problema de Valor Inicial (PVI):** [29, 47, 48, 51, 52, 68]
   - **Señal:** Si la solución obtenida es una familia de curvas que no pasa por el punto (t_0, y_0) dado por la condición inicial [29, 47, 48, 51, 68, 70].
   - **Cómo detectarlo:** Recordar siempre incluir C después de la primera integración y evaluarlo correctamente usando $y(t_0) = y_0$ para obtener la solución particular única [2, 20, 29, 39, 47, 48, 51, 67, 68, 84, 110, 112].
4. **Interpretar $y^* = b/a$ como un equilibrio fijo cuando a o b dependen de t:** [29, 48, 51, 68, 154]
   - **Señal:** Si el .^{eq}uilibrio"que se deduce de b/a varía en el tiempo [29, 48, 51, 68].
   - **Cómo detectarlo:** Recordar que $y^* = b/a$ es un estado estacionario solo si a y b son constantes [29, 48, 51, 68, 87]. Si $P(t)$ o $Q(t)$ son funciones del tiempo, la solución general es más compleja y la interpretación de un .^{eq}uilibrio"debe basarse en la solución completa [29, 48, 51].
5. **Unidades inconsistentes:** [29, 48, 51, 66-68, 154]
   - **Señal:** Si el coeficiente P no tiene la dimensión 1/tiempo o el término Q no tiene las dimensiones de unid(y)/tiempo [29, 48, 51, 66-70].
   - **Cómo detectarlo:** Verificar la consistencia dimensional de todos los términos en la ecuación; esto es crucial para la validez de los modelos aplicados y su sentido físico o económico [29, 48, 51, 66-70].

8.3. Análisis e Ideas Clave

La comprensión de las conexiones de las EDO lineales de primer orden con otros campos es crucial para una visión holística de las matemáticas aplicadas y la economía [155]. Son el "átomo"que compone "moléculas"más grandes, como los sistemas de ecuaciones diferenciales, y su lógica de "solución particular + solución homogénea.^{es} un principio unificador [49, 102, 108, 109, 153, 155]. Los errores comunes, por otro lado, son recordatorios prácticos de la necesidad de atención al detalle y de una comprensión conceptual sólida [155]. Las señales de detección rápida son un "diagnóstico a priori"que puede ahorrar mucho tiempo y evitar conclusiones erróneas en el análisis económico [155].

- Las EDO lineales de primer orden son el **bloque básico** para sistemas más complejos y ecuaciones en diferencias [49, 71, 102, 108, 109].

- La lógica **"solución particular + solución homogénea"** es un principio matemático fundamental transferible a diversos contextos [49, 71, 102, 108, 109].
- La **normalización** de la ecuación a la forma estándar es el primer paso crítico y a menudo descuidado [29, 47-50, 71].
- Un error en el **signo del factor integrante** es una trampa común que puede invalidar la solución [20, 29, 47-49, 71, 110].
- La **consistencia de unidades** es un chequeo de validez fundamental [29, 48, 66-68, 71].

8.4. Conclusiones Parciales

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no son un dominio aislado, sino un **puente conceptual y operativo** hacia áreas más avanzadas de las matemáticas y la economía [156]. Su rol como componente fundamental en sistemas dinámicos y como análogo continuo de las ecuaciones en diferencias subraya su importancia teórica [156]. Paralelamente, la identificación y prevención de errores comunes son habilidades prácticas indispensables [156]. Al ser conscientes de las trampas frecuentes y de las señales para detectarlas, los analistas pueden mejorar drásticamente la precisión y la fiabilidad de sus soluciones, garantizando que los modelos económicos basados en estas ecuaciones sean robustos y confiables [156].

9. Práctica Esencial (Problemas Resueltos)

Introducción: La consolidación de la comprensión de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se logra a través de la **práctica activa** [157]. Abordar problemas que integren la teoría, el cálculo y la interpretación es fundamental para desarrollar una competencia completa [157]. Esta sección presenta una serie de problemas seleccionados que abarcan desde el razonamiento conceptual hasta la aplicación mecánica y la interpretación económica de las soluciones, proporcionando una **guía escalonada** para su resolución [157]. Estos ejemplos ilustran cómo los conceptos abstractos se traducen en resultados concretos con significado real, consolidando el conocimiento adquirido en las secciones anteriores [157].

9.1. Problema Conceptual: Memoria Inicial

Pregunta: Explique por qué la "memoria inicial"de un sistema descrito por $y' + ay = b$ desaparece con el tiempo cuando $a > 0$ [33, 154]. **Solución Escalonada:**

1. **Identificación de la solución homogénea:** Para la ecuación $y' + ay = b$, la solución general es $y(t) = \frac{b}{a} + C, e^{-a(t-t_0)}$ [33, 38, 39, 43, 55, 142]. La "memoria inicial"del sistema está representada por la **solución homogénea**, que es el término $C, e^{-a(t-t_0)}$ [4, 19, 33, 67, 68]. Esta parte de la solución depende de la constante C, la cual a su vez está ligada a la condición inicial $y(t_0) = y_0$ [33].
2. **Análisis del factor exponencial:** Cuando $a > 0$, el coeficiente del exponente $(-a)$ es negativo [33, 67, 68]. A medida que el tiempo t aumenta, el término $t - t_0$ se hace más grande y positivo, lo que provoca que el exponente $-a(t - t_0)$ se haga cada vez más negativo [33, 67, 68].
3. **Comportamiento asintótico:** A medida que $t \to \infty$, el factor exponencial $e^{-a(t-t_0)} \to 0$ [29, 33, 37, 67, 68, 70, 154]. Esto significa que la influencia de la condición inicial (la "memoria"del sistema) se desvanece exponencialmente con el tiempo [27, 29, 33, 68].
4. **Dominio de la solución particular:** Lo que persiste a largo plazo es únicamente la **solución particular**, $\frac{b}{a}$, que representa la tendencia forzada por los parámetros a y b (el equilibrio de estado estacionario) [4, 27, 29, 33, 37, 38, 59, 67, 68, 70, 76, 154].
5. **Intuición económica:** Existe una "fricción.º una fuerza de ajuste proporcional a la desviación del equilibrio [33, 67, 68, 70]. Esta fuerza actúa para corregir cualquier diferencia entre el valor actual de la variable y su valor de equilibrio, borrando gradualmente el efecto de la condición inicial [33, 67, 68, 70]. Este es el principio de **estabilidad** para $a > 0$ [14, 33, 45, 59, 66, 68-70].

9.2. Problema Mecánico: Resolución Paso a Paso

Problema: Resolver $y' + (2/t)y = \sin t$, $t > 0$, con $y(\pi) = 0$ [158, 159]. **Solución Escalonada:**

1. **Factor integrante ($\mu(t)$):** Se identifica $P(t) = 2/t$ [93, 121, 158, 159].
$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\int (2/t), dt} \\ &= e^{2\ln|t|} \\ &= e^{\ln(t^2)}\end{aligned}$$
Dado $t > 0$, se tiene $|t| = t$. Por lo tanto:
$$\mu(t) = t^2$$

2. **Multiplicar por $\mu(t)$ y reconocer la derivada del producto:** La ecuación se convierte en [93, 121, 158, 159]:
$$\begin{aligned}t^2y' + (2/t)t^2y &= t^2\sin t \\ t^2y' + 2ty &= t^2\sin t\end{aligned}$$
El lado izquierdo es la derivada de t^2y:
$$\frac{d}{dt}(t^2y) = t^2\sin t$$

3. **Integrar ambos lados:** [93, 121, 158, 159]
$$\int \frac{d}{dt}(t^2y), dt = \int t^2\sin t, dt$$
El lado derecho requiere integración por partes, $\int u, dv = uv - \int v, du$.
   - Primera integración por partes para $\int t^2\sin t, dt$: Sea $u = t^2$, $dv = \sin t, dt \implies du = 2t, dt$, $v = -\cos t$. $\int t^2\sin t, dt = -t^2\cos t - \int(-\cos t)(2t), dt = -t^2\cos t + 2\int t\cos t, dt$.
   - Segunda integración por partes para $\int t\cos t, dt$: Sea $u = t$, $dv = \cos t, dt \implies du = dt$, $v = \sin t$. $\int t\cos t, dt = t\sin t - \int \sin t, dt = t\sin t + \cos t$.

   Sustituyendo el segundo resultado en el primero:
$$\int t^2\sin t, dt = -t^2\cos t + 2(t\sin t + \cos t) + C$$
Por lo tanto:
$$t^2y = -t^2\cos t + 2t\sin t + 2\cos t + C$$

4. **Despejar $y(t)$:** [93, 121, 158, 159]
$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{1}{t^2}(-t^2\cos t + 2t\sin t + 2\cos t + C) \\ y(t) &= -\cos t + \frac{2\sin t}{t} + \frac{2\cos t}{t^2} + \frac{C}{t^2}\end{aligned}$$

5. **Aplicar la condición inicial $y(\pi) = 0$:** [93, 121, 158, 159]
$$\begin{aligned}0 &= -\cos\pi + \frac{2\sin\pi}{\pi} + \frac{2\cos\pi}{\pi^2} + \frac{C}{\pi^2} \\ 0 &= -(-1) + \frac{2(0)}{\pi} + \frac{2(-1)}{\pi^2} + \frac{C}{\pi^2} \\ 0 &= 1 + 0 - \frac{2}{\pi^2} + \frac{C}{\pi^2} \\ \frac{C}{\pi^2} &= \frac{2}{\pi^2} - 1 \\ C &= 2 - \pi^2\end{aligned}$$

6. **Solución Final:** [93, 121, 158, 159]
$$\boxed{y(t) = -\cos t + \frac{2\sin t}{t} + \frac{2\cos t}{t^2} + \frac{2-\pi^2}{t^2}}$$

9.3. Problema Aplicado (Deuda Pública)

Problema: Considere la dinámica de la deuda pública $D' + rD = S$, con $r > 0$ (tasa de interés) y superávit primario constante $S < 0$. La condición inicial es $D(t_0) = D_0$ [159, 160]. **Solución Escalonada:**

1. **Identificación de la forma estándar:** La ecuación ya está en la forma $y' + ay = b$, donde $y(t) = D(t)$, $a = r$ y $b = S$ [32, 117, 121, 159, 160].
2. **Solución general (coeficientes constantes):** Utilizando la fórmula para coeficientes constantes, la solución general es [32, 40, 74, 114, 117, 121, 123, 159, 160]:
$$D(t) = \frac{S}{r} + C, e^{-r(t-t_0)}$$
3. **Aplicación de la condición inicial $D(t_0) = D_0$:** [160]
$$D_0 = \frac{S}{r} + C, e^{-r(t_0-t_0)}$$
$$D_0 = \frac{S}{r} + C, e^{0}$$
$$D_0 = \frac{S}{r} + C$$
$$C = D_0 - \frac{S}{r}$$
4. **Solución Final con PVI:** [40, 74, 117, 121, 123, 124, 159-161]
$$\boxed{D(t) = \frac{S}{r} + \left(D_0 - \frac{S}{r}\right)e^{-r(t-t_0)}} \tag{9}$$

Lectura Económica: Dado que $S < 0$ (superávit) y $r > 0$ (tasa de interés positiva), el término $\frac{S}{r}$ será negativo [160, 161]. Esto indica que la deuda **converge hacia un objetivo de deuda negativo** S/r, lo que implica una **posición acreedora** del gobierno a largo plazo [40, 44, 67, 74, 117, 121, 124, 159, 160]. La velocidad de esta convergencia está determinada por la tasa de interés r [67, 74, 117, 121, 160]. Cuanto mayor sea r, más rápido se alcanza esa posición acreedora (si $D_0 > S/r$, la deuda disminuirá más rápidamente) [40, 44, 74, 117, 160].

9.4. Problema de Consolidación (Precio Ajustable a Objetivo Cambiante)

Planteamiento: Un precio $p(t)$ se ajusta parcialmente a un objetivo cambiante $p^*(t) = \bar{p} + m, e^{-\gamma t}$. La ecuación que lo describe es $p' + \lambda p = \lambda p^*(t)$, donde $\lambda, \gamma > 0$ y $p(0) = p_0$ [4, 98, 125, 126, 162, 163]. **Solución Escalonada:**

1. **Forma estándar e identificación:** La ecuación ya está en forma estándar. Se identifica $P(t) = \lambda$ y $Q(t) = \lambda p^*(t) = \lambda(\bar{p} + m, e^{-\gamma t})$ [4, 98, 125, 126, 162, 163]. El factor integrante es:
$$\mu(t) = e^{\int \lambda, dt} = e^{\lambda t}$$
2. **Producto de la derivada:** Multiplicando la ecuación por el factor integrante, el lado izquierdo se convierte en la derivada de un producto [98, 125, 162, 163]:
$$(e^{\lambda t} p)' = e^{\lambda t}\lambda(\bar{p} + m, e^{-\gamma t})$$
3. **Integrar ambos lados:** [8, 60, 98, 125, 162-164]
$$e^{\lambda t} p = \int e^{\lambda t}\lambda(\bar{p} + m, e^{-\gamma t}), dt + C$$
$$e^{\lambda t} p = \lambda\bar{p} \int e^{\lambda t}, dt + \lambda m \int e^{\lambda t} e^{-\gamma t}, dt + C$$
$$e^{\lambda t} p = \lambda\bar{p} \int e^{\lambda t}, dt + \lambda m \int e^{(\lambda-\gamma)t}, dt + C$$

   Calculando las integrales:

- $\int e^{\lambda t}, dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$.
- $\int e^{(\lambda-\gamma)t}, dt = \frac{1}{\lambda-\gamma} e^{(\lambda-\gamma)t}$ (si $\lambda \neq \gamma$).

Sustituyendo:

$$e^{\lambda t} p = \lambda \bar{p} \left(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \right) + \lambda m \left(\frac{1}{\lambda - \gamma} e^{(\lambda-\gamma)t} \right) + C$$

$$e^{\lambda t} p = \bar{p} e^{\lambda t} + \frac{\lambda m}{\lambda - \gamma} e^{(\lambda-\gamma)t} + C$$

4. **Despejar $p(t)$ y aplicar PVI:** Dividiendo por $e^{\lambda t}$ [8, 60, 98, 127, 162, 164]:

$$p(t) = \bar{p} + \frac{\lambda m}{\lambda - \gamma} e^{-\gamma t} + C, e^{-\lambda t} \quad (\text{si } \lambda \neq \gamma)$$

Aplicando la condición inicial $p(0) = p_0$:

$$p_0 = \bar{p} + \frac{\lambda m}{\lambda - \gamma} e^{-\gamma(0)} + C, e^{-\lambda(0)}$$

$$p_0 = \bar{p} + \frac{\lambda m}{\lambda - \gamma} + C$$

$$C = p_0 - \bar{p} - \frac{\lambda m}{\lambda - \gamma}$$

Sustituyendo C en la solución:

$$\boxed{p(t) = \bar{p} + \frac{\lambda m}{\lambda - \gamma} e^{-\gamma t} + \left(p_0 - \bar{p} - \frac{\lambda m}{\lambda - \gamma} \right) e^{-\lambda t}} \tag{10}$$

Nota: Si $\lambda = \gamma$, la integral $\int e^{(\lambda-\gamma)t}, dt$ cambia a $\int e^{0t}, dt = \int dt = t$, lo que lleva a un término de la forma $t, e^{-\lambda t}$ en la solución (multiplicado por λm) [8, 60, 98, 127, 162, 164].

Interpretación Económica: La solución es la **suma de dos exponenciales** (además del término constante $\bar{p}$) [8, 60, 98, 127, 162, 164].

- Un término $C, e^{-\lambda t}$ (parte homogénea) que refleja la **"memoria del sistema"** con una tasa de decaimiento λ. Este componente desaparece a largo plazo si $\lambda > 0$ [27, 60, 127, 162, 164].
- Un término $\frac{\lambda m}{\lambda-\gamma} e^{-\gamma t}$ que refleja el **movimiento del objetivo cambiante** con una tasa de decaimiento γ. Este componente captura cómo el precio persigue el objetivo dinámico $p^*(t)$ [60, 127, 162, 164].

El **dominio de largo plazo** del precio es $\bar{p}$ [60, 127, 162, 164]. La magnitud y la forma del transitorio dependen del "desfase.^entre la velocidad de ajuste del precio (λ) y la velocidad de cambio del objetivo (γ) [60, 127, 162, 164].

9.5. Análisis e Ideas Clave

La práctica es el puente entre la teoría y la aplicación [165]. Los problemas resueltos no solo refuerzan la mecánica del factor integrante, sino que también obligan a una **interpretación profunda** de los resultados [165]. El problema conceptual ayuda a solidificar la intuición sobre la estabilidad [165]. El problema mecánico es una prueba de fuego para las habilidades de integración, mostrando la aplicación del método en un contexto no económico [165]. Los problemas aplicados y de consolidación, al integrar la economía, demuestran cómo la misma estructura matemática puede explicar fenómenos diversos, desde la deuda hasta los precios, y cómo los parámetros dictan el ritmo y el destino de las variables [165].

- La **parte homogénea** de la solución siempre decae si el coeficiente de ajuste a es positivo [33, 67, 68, 166].
- La **integración por partes** es una habilidad recurrente y necesaria en la resolución de ecuaciones donde $Q(t)$ es un producto de funciones [93, 121, 166].

- La **interpretación económica** es tan importante como el cálculo, ya que da sentido a los resultados matemáticos [98, 117, 121, 127, 166].
- La relación entre la **velocidad de ajuste** (λ) de la variable y la velocidad de cambio del objetivo (γ) es clave para entender la dinámica de seguimiento de la trayectoria [60, 127, 166].

9.6. Conclusiones Parciales

La resolución práctica de problemas es indispensable para dominar las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden [167]. Los ejemplos proporcionados, que varían en complejidad y enfoque, desde lo puramente conceptual hasta lo aplicado y consolidado, demuestran la versatilidad de la herramienta y la necesidad de una comprensión multifacética [167]. Cada paso en la solución, desde el cálculo del factor integrante hasta la aplicación de la condición inicial y la interpretación final, refuerza los conceptos teóricos y los traduce en habilidades tangibles [167]. Es a través de esta práctica rigurosa que los conocimientos abstractos se transforman en una capacidad sólida para analizar y modelar la dinámica económica, permitiendo a los estudiantes y profesionales abordar problemas del mundo real con confianza [167].

10. Síntesis y Ampliación

Introducción: La travesía a través de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden culmina en una **síntesis** de sus ideas fundamentales y una exploración de sus **posibles ampliaciones** [168]. Este resumen condensa la esencia de la forma canónica, el método de resolución y la interpretación, sirviendo como un **chequeo rápido** para la comprensión [168]. Además, se presenta una visión de cómo estas ecuaciones se extienden y se conectan con otros temas más avanzados, subrayando su rol como un **lenguaje básico** para describir procesos de ajuste y acumulación en tiempo continuo en diversas disciplinas, especialmente la economía, y cómo se integran en un marco matemático más amplio [64, 69, 150, 168].

10.1. Síntesis General

En síntesis, las **ecuaciones diferenciales lineales de primer orden**, cuya forma canónica es $\mathbf{y' + Py = Q}$, constituyen el **lenguaje básico para describir procesos de ajuste y acumulación en tiempo continuo** [3, 12, 66, 81, 113, 129, 153, 169, 170]. La **solución general** se obtiene sistemáticamente mediante el **método del factor integrante** ($\mu = \mathbf{e}^{\int \mathbf{P}}$), resultando en $\mathbf{y = \mu^{-1}\big(\int \mu Q + C\big)}$ [1, 66, 81, 101, 105, 113, 129, 153, 169, 170]. Este método transforma la ecuación en la derivada de un producto, permitiendo una integración directa y simplificando el proceso de resolución [2, 113, 129, 153, 169, 170].
La **estructura de la solución** es fundamental: se compone de una **solución particular (forzada)** y una **solución homogénea (transitoria)** [4, 8, 19, 66, 69, 76, 77, 81, 129, 150, 171]. Para el caso con **coeficientes constantes** ($y' + ay = b$), la solución explícita es $\mathbf{y(t) = y^* + (y_0 - y^*)e^{-a(t-t_0)}}$, donde $\mathbf{y^* = b/a}$ es el equilibrio de estado estacionario o el valor de largo plazo [27, 38, 47, 66, 69, 77, 81, 114, 129, 171]. La **unicidad de la solución** para un Problema de Valor Inicial (PVI) está garantizada si P y Q son funciones continuas, asegurando la predictibilidad del modelo [14, 17, 60, 62, 63, 66, 69, 70, 77, 81, 129, 171].

10.2. Interpretación y Chequeos Rápidos

Desde una perspectiva **geométrica**, si el coeficiente $a > 0$, el sistema es **estable**, y las trayectorias convergen hacia el equilibrio y^* [29, 54, 66, 69, 72, 77, 81, 129]. La **tasa de convergencia** es determinada por $|a|$, siendo un indicador de la velocidad de ajuste del sistema [29, 54, 66, 69, 72, 77, 81, 129]. En **economía**, los parámetros tienen interpretaciones claras: **a** representa la fricción, ajuste, o tasa de depreciación, mientras que **b** o $\mathbf{Q(t)}$ es el impulso o flujo exógeno que alimenta el sistema [23, 25, 31, 42, 53, 54, 66, 69, 72, 77, 81, 84, 91, 111, 129]. Las **unidades** son clave para la interpretación y consistencia del modelo: $[P] = 1/\text{tiempo}$ y $[Q] = [y]/\text{tiempo}$ [48, 56, 66, 67, 69, 70, 72, 77, 81, 111, 129].
Para un **chequeo rápido** de la solución, se debe verificar que la ecuación esté en forma estándar, que el signo en $\int P$ sea correcto (evitando el error común de $e^{-\int P}$), que la constante C se haya incluido

y que el PVI esté satisfecho, y que las unidades sean consistentes en todos los términos de la ecuación [39, 47, 69, 73-75, 115, 120, 172].

10.3. Análisis e Ideas Clave

La ïdea-fuerzaçentral que rige toda EDO lineal de primer orden es la **"pelea.^{en}tre la memoria inicial del sistema** (la parte homogénea) y los **empujes externos o forzamientos** (la parte particular) [3, 24, 27, 29, 34, 37, 79, 123]. Si existe una "fricción"positiva (es decir, $a > 0$), la memoria inicial decae exponencialmente, y son los empujes externos los que terminan determinando la tendencia a largo plazo del sistema [29, 34, 37]. Esta dicotomía es fundamental para comprender cómo los sistemas económicos evolucionan más allá de sus condiciones de partida, impulsados por políticas y shocks externos [34]. El dominio de este tema esencial habilita un **puente operativo** crucial entre la teoría matemática y la práctica económica, permitiendo cuantificar tiempos de convergencia, estados estacionarios y los efectos de políticas en variables como precios, capital, deuda e inventarios [3, 24, 34, 79, 123, 130, 150, 153, 170].

- La **solución es una combinación de lo transitorio y lo forzado**, lo que permite analizar la dinámica a corto y largo plazo [4, 8, 35, 66, 77, 81, 170].
- La **estabilidad** (convergencia hacia un equilibrio) se da si el coeficiente de ajuste a es positivo [27, 35, 66, 77, 81].
- Los **parámetros** tienen interpretaciones económicas claras de ajuste (fricción) y flujos (impulsos externos) [31, 35, 66, 77, 81, 84, 91, 111].
- El tema es un **bloque constructivo** fundamental para el análisis de sistemas dinámicos complejos [35, 49, 102, 108, 109, 113].
- La **memoria inicial se desvanece** exponencialmente frente a los forzamientos persistentes si el sistema es estable [3, 24, 27, 35, 79, 123].

10.4. Conclusiones Parciales

La síntesis y ampliación reafirman el estatus de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden como una herramienta fundamental en la modelización de sistemas dinámicos [173]. Desde su forma canónica y método de resolución hasta sus interpretaciones geométricas y económicas, estos conceptos se interconectan para ofrecer una comprensión robusta [173]. La capacidad de chequear rápidamente los resultados y la conciencia de sus extensiones a sistemas más complejos y escenarios realistas (como shocks o parámetros variables) demuestran su versatilidad [173]. En última instancia, estas ecuaciones proporcionan el marco analítico para cuantificar la interacción entre la inercia interna de un sistema y las fuerzas externas que lo impulsan hacia su destino a largo plazo, siendo esenciales para el análisis económico dinámico [173].

11. Red Conceptual

Esta sección presenta una red conceptual jerárquica que organiza los conceptos, axiomas, relaciones y la secuencia lógica del cálculo de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, así como sus aplicaciones principales en economía [174]. Esta estructura busca consolidar el conocimiento y facilitar la comprensión global del tema [174].

- **Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden (EDO LP1O)**
  - **Definición General:** Ecuación de la forma $y'(t) + P(t)y(t) = Q(t)$ donde y aparece en grado 1 y sin productos con y' .
  - **Propósito Principal:** Modelar la dinámica de variables económicas donde el ritmo de cambio es proporcional a su nivel actual y/o influenciado por flujos externos constantes o variables .
  - **Componentes Clave de la Ecuación:**
    - t: Variable independiente, usualmente el tiempo (e.g., años, trimestres).

- $y(t)$: Variable de interés o función incógnita (e.g., precio, capital, deuda, inventario, ingreso) .
- $P(t)$: Coeficiente proporcional, representa una tasa de ajuste, depreciación, o fricción. Unidades: 1/tiempo .
- $Q(t)$: Flujo exógeno o "fuerza"que impulsa el sistema (e.g., demanda autónoma, inversión constante, superávit primario). Unidades: unid(y)/tiempo .
- y_0, t_0: Condición inicial y el instante inicial del sistema.

- **Axiomas/Postulados (Condiciones de Existencia y Unicidad):**
  - **Continuidad de $P(t)$ y $Q(t)$:** $P(t), Q(t)$ deben ser continuas en un intervalo I que contenga t_0 .
  - **Implica Lipschitz:** Linealidad + continuidad $\Rightarrow$ condición de Lipschitz automática en y .
  - **Garantías:** Existencia, Unicidad, Propagación de la solución en I.
- **Método de Resolución Principal: Factor Integrante** .
  - **Fórmula:** $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$.
  - **Transformación:** $\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)Q(t)$.
  - **Solución General:** $y(t) = \mu(t)^{-1}\Big(\int \mu(s)Q(s), ds + C\Big)$.
  - **Cálculo de C (para PVI):** $C = y_0\mu(t_0)$.
- **Estructura de la Solución:**
  - **Solución Homogénea (y_h):** $C\, e^{-\int P(t)dt}$ (componente transitorio, "memoria inicial") . Decae si $P(t) > 0$ (estabilidad) .
  - **Solución Particular (y_p):** Antiderivada del término forzado (componente forzado por $Q(t)$) . Determina el comportamiento a largo plazo .
- **Casos Especiales Clave:**
  - **Homogénea ($Q \equiv 0$):** $y(t) = C\, e^{-\int P(t)dt}$.
  - **Coeficientes Constantes ($y' + ay = b$):** $y(t) = \frac{b}{a} + (y_0 - \frac{b}{a})e^{-a(t-t_0)}$.
  - $a = 0$ **(en constantes):** $y' = b \Rightarrow y(t) = bt + C$ (crecimiento lineal, sin equilibrio interno) .
  - $y_0 = y^*$**:** Trayectoria constante (memoria inicial nula).
- **Aplicaciones Económicas Clave:**
  - Ajuste de Precios/Ingreso .
  - Dinámica de Deuda Pública .
  - Acumulación de Capital .
  - Gestión de Inventarios .
  - Oferta Monetaria .
- **Relaciones con Otros Temas (Puentes Operativos):**
  - **Ecuaciones en Diferencias (EED):** Análogo discreto (misma lógica particular+homogénea).
  - **Sistemas Lineales (2x2):** Bloque básico para dinámica conjunta (matrices) .
  - **Control Óptimo/Crecimiento Económico:** Modelos de acumulación de capital.
  - **Estabilidad de Sistemas Dinámicos:** El signo de P determina atracción/repulsión del equilibrio .
- **Errores Comunes y Chequeos Rápidos (Secuencia Lógica del Cálculo):**
  - **Poner en forma estándar ($y' + Py = Q$):** Coeficiente de y' debe ser 1 .
  - **Calcular Factor Integrante:** $\mu = e^{\int P}$ (cuidado con el signo) .
  - **Integrar y No Olvidar C:** $\mu y = \int \mu Q + C$.
  - **Aplicar PVI correctamente:** C se halla con $y(t_0) = y_0$.
  - **Consistencia de Unidades:** $[P] = 1/$tiempo, $[Q] = [y]/$tiempo .
  - **Interpretación de $y^* = b/a$:** Solo fijo si a, b son constantes, si no, es una solución general compleja .

Ecuaciones Diferenciales: Lineales y Bernoulli

toobaziti

Disclaimer: Este documento se ha elaborado a partir de la grabación de una clase, la presentación visual consultada y/o el material bibliográfico recomendado. Dada la naturaleza de su composición, podría contener imprecisiones u omisiones derivadas de la calidad del audio, interrupciones involuntarias o errores de redacción. Se recomienda siempre consultar la grabación o fuente original correspondiente para confirmar cualquier detalle en caso de duda.

Índice

1. Introducción y Contexto de la Ecuación de Bernoulli **1**
- 1.1. Definición Formal . . . 1
- 1.2. Importancia y Aplicaciones . . . 1
- 1.3. Casos Lineales (Exponentes que Simplifican) . . . 1

2. Notación, Vocabulario y Supuestos Fundamentales **2**
- 2.1. Símbolos y Vocabulario Clave . . . 2
- 2.2. Convenciones de Notación . . . 2
- 2.3. Supuestos y Regularidad . . . 3
- 2.4. Consecuencias del Incumplimiento de Supuestos . . . 3

3. La Transformación Fundamental de Bernoulli: Intuición y Deducción **3**
- 3.1. Intuición Matemática detrás de la Sustitución . . . 3
- 3.2. Procedimiento Paso a Paso de la Transformación . . . 4

4. Resolución de la Ecuación Lineal y Recuperación de la Solución **4**
- 4.1. Resolución de la Ecuación Lineal en $\mathbf{u}$ . . . 5
- 4.2. Recuperación de la Solución Original $\mathbf{y(x)}$ . . . 5
- 4.3. Consideraciones para la Recuperación de $\mathbf{y(x)}$ . . . 5

5. Consideraciones Críticas y Prácticas **6**
- 5.1. Verificación de $\mathbf{y \equiv 0}$ (Solución Trivial/Singular) . . . 6
- 5.2. Dominio de Validez de la Solución . . . 6
- 5.3. Elección de Rama y Condiciones Iniciales . . . 6
- 5.4. Existencia y Unicidad . . . 6

6. Analogías y Visualización **7**
- 6.1. Analogías Conceptuales . . . 7
- 6.2. Visualización Geométrica (Campo de Pendientes) . . . 7
- 6.3. Comportamiento Cualitativo . . . 7

7. Ejemplos Prácticos Detallados y Problema de Consolidación **8**
- 7.1. Ejemplo 1: Bernoulli con $\mathbf{n = 2}$ (Un Caso Típico) . . . 8
- 7.2. Ejemplo 2: Bernoulli con $\mathbf{n = -1}$ (Potencia Negativa y Restricciones de Dominio) . . . 9
- 7.3. Ejemplo 3: $\mathbf{n = 0}$ (Reducción a Lineal Directo) . . . 10
- 7.4. Problema de Consolidación: $\mathbf{n = 3}$ (Teoría + Cálculo + Interpretación) . . . 10

1. Introducción y Contexto de la Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli, una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de primer orden, representa un puente crucial entre el mundo lineal y el no lineal de las EDOs . A pesar de su apariencia no lineal, esta ecuación posee una propiedad notable: puede ser transformada en una EDO lineal mediante una sustitución estratégica, permitiendo su resolución sistemática a través de métodos bien establecidos, como el factor integrante .
Esta sección presentará la definición formal de la ecuación, explorará su relevancia en diversas disciplinas y delineará los casos particulares donde la ecuación ya se comporta linealmente . Abordaremos su importancia en modelos de crecimiento, economía, física y biología, donde la no linealidad emerge con frecuencia . Finalmente, distinguiremos los escenarios para $n = 0$ y $n = 1$, que, por su naturaleza lineal, no requieren la transformación de Bernoulli, sentando las bases para una comprensión profunda del método .

1.1. Definición Formal

La **ecuación de Bernoulli** es una EDO de primer orden con la forma canónica :

$$\mathbf{y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y(x)^n}$$

Donde:

- $\mathbf{y(x)}$ es la función incógnita o variable dependiente que buscamos .
- $\mathbf{y'(x)}$ o $\mathbf{dy/dx}$ es la derivada de y con respecto a x .
- $\mathbf{P(x)}$ o $\mathbf{p(x)}$ es una función conocida, coeficiente del término $y(x)$, generalmente continua en un intervalo I .
- $\mathbf{Q(x)}$ o $\mathbf{q(x)}$ es una función conocida, coeficiente del término no lineal $y(x)^n$, generalmente continua en un intervalo I .
- $\mathbf{n}$ es un exponente real que introduce la no linealidad en la ecuación .

1.2. Importancia y Aplicaciones

La forma de Bernoulli es crucial porque aparece en una variedad de modelos aplicados en ciencia, ingeniería y economía :

- **Modelos de crecimiento con retroalimentación no lineal**: tales como la dinámica de poblaciones (ej. modelos logísticos o de saturación) .
- **Problemas de mezclas**: donde las tasas de concentración dependen no linealmente de la concentración misma .
- **Modelos económicos y de control**: donde la respuesta del sistema depende no linealmente de su estado actual .
- **Circuitos eléctricos**: con componentes que introducen no linealidades de potencia .
- **Física**: en modelos de fricción no lineal o para linealizar ecuaciones más complejas como la de Riccati .

Saber resolverlas es una herramienta fundamental que nos enseña una idea central en el análisis de EDOs: **buscar la variable adecuada que "linealice.el problema** .

1.3. Casos Lineales (Exponentes que Simplifican)

Es fundamental reconocer que la ecuación de Bernoulli no siempre requiere una transformación para ser resuelta; en ciertos casos, ya es lineal :

- **Si $\mathbf{n = 0}$**: La ecuación se reduce a $y' + P(x)y = Q(x)$, que es una EDO **lineal** de primer orden estándar . Se resuelve directamente con el método del factor integrante .

- **Si $\mathbf{n = 1}$**: La ecuación se convierte en $y' + P(x)y = Q(x)y$, lo que se puede reescribir como $y' + (P(x) - Q(x))y = 0$. Esta es una EDO **lineal homogénea** . Tampoco requiere la sustitución de Bernoulli .

La "no linealidadreal y, por ende, la necesidad de la sustitución de Bernoulli, solo aparecen cuando $\mathbf{n \neq 0, 1}$.

Conclusión Parcial de la Sección 1

La ecuación de Bernoulli es un arquetipo fundamental en las EDOs, destacando la posibilidad de transformar problemas no lineales en lineales a través de una sustitución adecuada [1, 46, 63-72]. Su presencia en modelos económicos, físicos y biológicos subraya su relevancia práctica, mientras que la existencia de casos lineales para $n = 0$ y $n = 1$ resalta la especificidad de la no linealidad que el método de Bernoulli aborda [6, 18-26]. Esta comprensión inicial es clave para apreciar la elegancia y la utilidad del método en el contexto de las EDOs [19, 38-40, 49, 50].

2. Notación, Vocabulario y Supuestos Fundamentales

Para abordar la ecuación de Bernoulli con precisión, es imprescindible establecer una notación clara y comprender los supuestos que rigen su aplicabilidad [55]. Esta sección detalla los símbolos matemáticos utilizados, las convenciones de escritura y las condiciones de regularidad que deben cumplir las funciones y las soluciones . Una comprensión rigurosa de estos elementos es fundamental para evitar errores conceptuales y operativos, asegurando la validez y la interpretación correcta de las soluciones obtenidas .
Explicaremos los requisitos de continuidad para los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$, y las implicaciones de restricciones como $y \neq 0$ o la necesidad de argumentos positivos para logaritmos y no negativos para raíces pares. Se presentarán contraejemplos breves para ilustrar qué sucede cuando estos supuestos no se cumplen, enfatizando la importancia de verificar la solución trivial $y \equiv 0$ y de manejar correctamente los dominios de validez .

2.1. Símbolos y Vocabulario Clave

- $\mathbf{y(x)}$: Función incógnita o variable dependiente que buscamos .
- $\mathbf{x}$: Variable independiente.
- $\mathbf{y'(x)}$ o $\mathbf{dy/dx}$: Derivada de y con respecto a x .
- $\mathbf{P(x)}$ o $\mathbf{p(x)}$: Función conocida, coeficiente del término $y(x)$. Generalmente continua en un intervalo I .
- $\mathbf{Q(x)}$ o $\mathbf{q(x)}$: Función conocida, coeficiente del término no lineal $y(x)^n$. Generalmente continua en un intervalo I .
- $\mathbf{n}$: Exponente real que introduce la no linealidad en la ecuación .
- $\mathbf{u(x)}$ o $\mathbf{z(x)}$: Nueva variable transformada, definida como $y(x)^{1-n}$, que linealiza la ecuación].
- $\mu\mathbf{(x)}$: Factor integrante, utilizado para resolver la ecuación lineal en u .
- $\mathbf{C}$: Constante de integración, que representa la familia de soluciones .

2.2. Convenciones de Notación

- Las derivadas se denotan con un apóstrofe ($\mathbf{y'}$) o con la notación de Leibniz ($\mathbf{dy/dx}$) .
- ln se refiere al logaritmo natural .
- $\exp(\mathbf{f(x)})$ es $e^{f(x)}$.
- Los valores absolutos en logaritmos ($\ln|\mathbf{x}|$) son importantes y deben ajustarse al dominio de la condición inicial .

2.3. Supuestos y Regularidad

Las condiciones típicas para aplicar el método de Bernoulli y asegurar la validez de las soluciones son :

- $\mathbf{P(x)}$ y $\mathbf{Q(x)}$ deben ser **funciones continuas** en un intervalo I donde se busca la solución . Esta continuidad es crucial para garantizar la **existencia y unicidad local** de la solución de la ecuación lineal transformada en u .
- La sustitución principal $\mathbf{u = y^{1-n}}$ **requiere implícitamente que** $\mathbf{y \neq 0}$. Esto se debe a la división por y^n o a la definición de la sustitución si $1 - n$ es negativo o no entero .
- Si la sustitución o la recuperación de y implica raíces pares (ej. $\sqrt{\cdot}$), el argumento debe ser **no negativo** .
- Si aparecen logaritmos (ej. $\ln(g(x))$), el argumento debe ser **positivo** .

2.4. Consecuencias del Incumplimiento de Supuestos

- **Si** $\mathbf{y = 0}$ **donde la sustitución requiere** $\mathbf{y \neq 0}$: La solución $\mathbf{y \equiv 0}$ (solución trivial o singular) se "pierde.º ïgnora"por la sustitución . Por ejemplo, en $y' + y = xy^2$, $y \equiv 0$ es una solución, pero la sustitución $u = 1/y$ no la detecta . Si la EDO original contiene y^{-1}, entonces $y \equiv 0$ no puede ser solución porque la ecuación no estaría definida .
- **Si** $\mathbf{P(x)}$ **o** $\mathbf{Q(x)}$ **no son continuas**: La teoría de existencia y unicidad local para EDO lineales (que aplica a la ecuación transformada en u) podría no ser válida, lo que llevaría a la posible pérdida de una solución única . Por ejemplo, si $P(x) = 2/x$, entonces $x = 0$ es un punto singular y la EDO no está definida allí, invalidando la solución en ese punto .

Conclusión Parcial de la Sección 2

La claridad en la notación y la comprensión de los supuestos son pilares para la correcta aplicación del método de Bernoulli [55, 56]. Las condiciones de continuidad de $P(x)$ y $Q(x)$, junto con las restricciones de dominio para $y(x)$ (particularmente $y \neq 0$), los logaritmos y las raíces pares, no son meros formalismos; son cruciales para asegurar la existencia, unicidad y validez física de las soluciones . Ignorar estas consideraciones puede conducir a soluciones erróneas o incompletas, especialmente con la omisión de soluciones triviales como $y \equiv 0$ [15, 40, 51, 57, 81-90].

3. La Transformación Fundamental de Bernoulli: Intuición y Deducción

El corazón del método de Bernoulli radica en una ingeniosa transformación que convierte una ecuación no lineal en una lineal, facilitando su resolución . Esta sección profundiza en la intuición matemática detrás de la elección de la sustitución $u = y^{1-n}$, explicando cómo esta variable rectifica"la no linealidad impuesta por la potencia y^n .
Presentaremos una deducción algebraica paso a paso, mostrando cómo la ecuación de Bernoulli se transforma sistemáticamente en una ecuación lineal en la nueva variable $u(x)$. Cada operación será detallada para clarificar el proceso de conversión, desde la definición de la sustitución y el cálculo de su derivada, hasta la reescritura final en la forma canónica de una EDO lineal de primer orden, lista para ser resuelta por el factor integrante .

3.1. Intuición Matemática detrás de la Sustitución

La no linealidad de la ecuación de Bernoulli surge del término $\mathbf{y^n}$. La elección de la sustitución $\mathbf{u(x) = y(x)^{1-n}}$ no es arbitraria; está diseñada específicamente para .ªplanar.º rectificar.ªesta no linealidad .

- **El factor clave**: La derivada de $u = y^{1-n}$ es $\mathbf{u' = (1 - n)y^{-n}y'}$. Este $y^{-n}y'$ contiene un factor y^{-n} que es la clave. Al multiplicar la ecuación original por y^{-n}, el término $Q(x)y^n$ se convierte en $Q(x)y^n y^{-n} = Q(x)$, eliminando la potencia de y del lado derecho.

- **Analogía con logaritmos**: Es similar a tomar logaritmos para convertir productos en sumas. Aquí, la transformación $u = y^{1-n}$ convierte la estructura multiplicativa y no lineal de y^n en una dependencia lineal de la nueva variable u .
- **Visualización geométrica**: Geométricamente, la sustitución .ªplana"la curvatura producida por el término y^n, haciendo que el campo de pendientes de u sea más sencillo y las curvas de solución más fáciles de describir . Es una especie de reescalado"de la variable que elimina la complejidad no lineal .

3.2. Procedimiento Paso a Paso de la Transformación

La deducción algebraica para transformar la ecuación de Bernoulli en una lineal en u es la siguiente :

1. **Partimos de la EDO de Bernoulli original**:
$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$
2. **Definimos la sustitución**: Para $n \neq 1$, introducimos una nueva variable $\mathbf{u(x) = y(x)^{1-n}}$.
3. **Derivamos u con respecto a x (usando la regla de la cadena)**:
$$u' = (1-n)y^{-n}y'$$
De aquí, podemos expresar $y' = \dfrac{1}{1-n}y^n u'$.
4. **Multiplicamos la EDO de Bernoulli original por $\mathbf{(1-n)y^{-n}}$** (este paso es la clave para introducir u' y simplificar el término y^n):
$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$
5. **Sustituimos u′ y u en la ecuación transformada**: Observamos que el primer término es exactamente u' y el segundo contiene y^{1-n} que es u. Así, la ecuación se convierte en:
$$\mathbf{u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)}$$

Esta es una **ecuación lineal de primer orden en u** . Para simplificar, podemos denotar $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{1-n})\mathbf{P}(\mathbf{x})$ y $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{1-n})\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, obteniendo la forma estándar de una ecuación lineal: $u' + \tilde{P}(x)u = \tilde{Q}(x)$.

Conclusión Parcial de la Sección 3

La transformación fundamental de Bernoulli, a través de la sustitución $u = y^{1-n}$, es una manifestación elegante de cómo una elección inteligente de variable puede desmantelar la no linealidad en una EDO . La intuición de .ªplanar"la potencia y^n se traduce en un procedimiento algebraico directo que culmina en una ecuación lineal en u, cuya estructura es bien conocida y manejable . Este paso es la piedra angular para resolver las ecuaciones de Bernoulli, demostrando la potencia de las transformaciones en la simplificación de problemas matemáticos .

4. Resolución de la Ecuación Lineal y Recuperación de la Solución

Una vez que la ecuación de Bernoulli ha sido exitosamente transformada en una EDO lineal en la nueva variable $u(x)$, el problema se reduce a aplicar métodos estándar de resolución de ecuaciones lineales de primer orden . Esta sección detalla el proceso para resolver la ecuación lineal resultante utilizando el factor integrante y, posteriormente, el crucial paso de recuperar la solución en términos de la variable original $y(x)$.
Se prestará especial atención a las consideraciones prácticas durante la recuperación de $y(x)$, incluyendo cómo las propiedades de la potencia inversa pueden introducir restricciones en el dominio de la solución, la importancia del signo de $u(x)$ y cómo las condiciones iniciales determinan las constantes de integración y la elección de ramas en soluciones con raíces pares .

4.1. Resolución de la Ecuación Lineal en u

La ecuación lineal resultante es de la forma $u' + \tilde{P}(x)u = \tilde{Q}(x)$, donde $\tilde{P}(x) = (1-n)P(x)$ y $\tilde{Q}(x) = (1-n)Q(x)$. Para resolverla, se emplea el **método del factor integrante** :

1. **Calcular el Factor Integrante**: El factor integrante $\mu(\mathbf{x})$ es:

$$\mu(\mathbf{x}) = \exp\Big(\int \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\Big) = \exp\Big(\int (\mathbf{1}-\mathbf{n})\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\Big)$$

2. **Multiplicar la ecuación lineal por** $\mu(\mathbf{x})$: Esto permite reescribirla como la derivada de un producto:

$$(\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}))' = \mu(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})(\mathbf{1}-\mathbf{n})\mathbf{Q}(\mathbf{x})$$

3. **Integrar ambos lados respecto a x y despejar** $\mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int \mu(\mathbf{x})(\mathbf{1}-\mathbf{n})\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{dx} + \mathbf{C}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mu(\mathbf{x})}\Big(\int \mu(\mathbf{x})(\mathbf{1}-\mathbf{n})\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{dx} + \mathbf{C}\Big)$$

   Donde **C** es la constante de integración, determinada por las condiciones iniciales.

4.2. Recuperación de la Solución Original y(x)

Una vez que se ha encontrado la solución para $u(x)$, el siguiente paso es regresar a la variable original $y(x)$ utilizando la sustitución inversa :

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\mathbf{n}}}$$

4.3. Consideraciones para la Recuperación de y(x)

Este paso no es trivial y requiere atención a varias condiciones prácticas :

- **Restricciones de Dominio**: La potencia $1/(1-n)$ puede introducir restricciones. Si, por ejemplo, $1/(1-n)$ es una fracción con denominador par (ej. $1/2$), $u(x)$ debe ser no negativo para que $y(x)$ sea real .
- **Elección de Rama**: Si $1/(1-n)$ conduce a una raíz par (ej. $\pm\sqrt{\dots}$), la solución general tendrá dos ramas de signo. La condición inicial $\mathbf{y}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{y_0}$ es crucial para fijar la rama correcta (el signo) en el intervalo conectado del dominio de interés .
- **Puntos Singulares**: Se deben tener en cuenta los puntos donde $u(x)$ se anula o donde la EDO original presenta singularidades (ej. $x = 0$ si $P(x) = 2/x$) .
- **Constante de Integración**: La condición inicial también se utiliza para determinar el valor de la constante C, fijando una solución particular de la familia general .

Conclusión Parcial de la Sección 4

La resolución de la ecuación de Bernoulli se completa al dominar el método del factor integrante para la ecuación lineal en u y, crucialmente, al recuperar la variable original $y(x)$. La etapa de recuperación exige una vigilancia meticulosa sobre el dominio, la elección de la rama correcta y el uso preciso de las condiciones iniciales, dado que la potencia inversa puede introducir complejidades como raíces pares o denominadores que no deben anularse . Este rigor asegura que la solución final sea matemáticamente válida y aplicable en el contexto del problema original .

5. Consideraciones Críticas y Prácticas

Más allá de los pasos mecánicos de transformación y resolución, la aplicación efectiva del método de Bernoulli exige una profunda atención a detalles críticos que pueden afectar la validez y completitud de las soluciones . Esta sección aborda los aspectos más sutiles pero fundamentales, como la imperativa verificación de la solución trivial $y \equiv 0$, que a menudo es ignorada por la sustitución .
Analizaremos la importancia de establecer el dominio de validez de la solución final, considerando las restricciones impuestas por logaritmos y raíces pares, así como la identificación de puntos singulares de la EDO original .

5.1. Verificación de $y \equiv 0$ (Solución Trivial/Singular)

- La sustitución $\mathbf{u = y^{1-n}}$ **requiere implícitamente que** $\mathbf{y \neq 0}$. Por lo tanto, $\mathbf{y \equiv 0}$ debe ser siempre verificado por separado en la EDO original .
- Si la ecuación contiene potencias negativas de y (ej. y^{-1}), entonces $y \equiv 0$ generalmente **no** es una solución válida, ya que la ecuación no estaría definida en $y = 0$.
- Si $y \equiv 0$ es una solución de la EDO original y la condición inicial es $y(x_0) = 0$, puede ser la única solución si la función $f(x, y) = -P(x)y + Q(x)y^n$ satisface las condiciones de Lipschitz en y cerca de $y = 0$.

5.2. Dominio de Validez de la Solución

Las transformaciones pueden introducir restricciones importantes en el dominio :

- Si aparecen $\ln(\mathbf{g(x)})$ en la solución, se requiere que $\mathbf{g(x) > 0}$.
- Si aparecen **raíces pares** $\sqrt{h(x)}$, se requiere que $\mathbf{h(x) \geq 0}$.
- Siempre se deben identificar los **puntos singulares de** $\mathbf{P(x)}$ **y** $\mathbf{Q(x)}$ en la ecuación original (por ejemplo, si $P(x) = 2/x$, entonces $x = 0$ es un punto singular y la solución podría no estar definida allí) .
- La expresión final para $\mathbf{y(x) = u(x)^{1/(1-n)}}$ exige controlar el dominio y el signo de $u(x)$, especialmente si $1/(1 - n)$ no es un entero (p. ej., si es una raíz par, $u(x)$ debe ser no negativo para que $y(x)$ sea real) .

5.3. Elección de Rama y Condiciones Iniciales

- Cuando la potencia $1/(1 - n)$ resulta en una raíz par (por ejemplo, $\pm\sqrt{\ldots}$), la solución general tendrá dos ramas de signo. La condición inicial $\mathbf{y(x_0) = y_0}$ es crucial para fijar la rama (el signo) en el intervalo conectado del dominio de interés .
- Las condiciones iniciales también se utilizan para determinar el valor de la constante de integración C en la solución general .

5.4. Existencia y Unicidad

- Si $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo y consideramos condiciones iniciales $y(x_0) = y_0 \neq 0$, entonces la ecuación transformada en u es lineal con coeficientes continuos. Por tanto, tiene existencia y unicidad local para u, lo que se traduce en una solución única para y (mientras $y \neq 0$) .
- Las condiciones de Lipschitz para $f(x, y)$ (donde $y' = f(x, y)$) son relevantes para garantizar la unicidad de las soluciones, especialmente cerca de puntos donde $y = 0$.

Conclusión Parcial de la Sección 5

Las consideraciones prácticas y críticas son tan vitales como el método de transformación y resolución en sí mismo . La omisión de la verificación de $y \equiv 0$, el descuido en la determinación del dominio de validez o una elección incorrecta de la rama en soluciones con raíces pares pueden invalidar la solución final . Un enfoque riguroso, que integre la teoría de existencia y unicidad con las condiciones iniciales, asegura que la solución obtenida sea no solo matemáticamente correcta, sino también contextualmente aplicable y única en su entorno.

6. Analogías y Visualización

Las analogías y la visualización son herramientas pedagógicas invaluables para comprender la esencia de la transformación de Bernoulli, especialmente al abordar conceptos que, de otra manera, podrían parecer abstractos . Esta sección explora diversas metáforas que clarifican la intuición matemática detrás de la sustitución $u = y^{1-n}$, comparándola con el ajuste de una lente, el desenredo de un nudo o la simplificación de un mecanismo complejo .
Asimismo, se discutirá cómo la transformación afecta la **visualización geométrica** de las soluciones en un campo de pendientes, .ªplanando"la curvatura no lineal y facilitando la descripción de las curvas de solución en la nueva variable $u(x)$. Finalmente, se abordará el **comportamiento cualitativo** de las soluciones, incluyendo fenómenos como la convergencia, la explosión o la aparición de singularidades, enriqueciendo la comprensión de las dinámicas de las ecuaciones de Bernoulli .

6.1. Analogías Conceptuales

- **Analogía del "Desenredo.º "Lubricante"**: Imagine la ecuación original como un "nudo.º .enredoçomplejo debido a la no linealidad de y^n. La sustitución $u = y^{1-n}$ actúa como un "lubricante.º una "llave maestra"que permite desenredar la complejidad, convirtiendo ese nudo en una çuerda recta"(la ecuación lineal) que podemos manejar fácilmente con nuestras herramientas .

- **Analogía de la "Lente.º .ªmpliación"**: Piense que la ecuación original es un problema visto a través de una lente distorsionada, donde las curvas de solución de $y(x)$ parecen muy çurvadas". Aplicar la sustitución $u = y^{1-n}$ es como **ajustar la ampliación o cambiar la lente** a una que rectifica esa distorsión. Los objetos (curvas de solución) se transforman a una escala donde son rectificables"(lineales), mucho más fáciles de describir y analizar .

- **Analogía con logaritmos**: Al igual que la función ln convierte productos en sumas, la sustitución de Bernoulli convierte una potencia multiplicativa en un término lineal .

6.2. Visualización Geométrica (Campo de Pendientes)

En un campo de pendientes, cada punto (x, y) tiene una pendiente $y' = -P(x)y + Q(x)y^n$. La transformación $u = y^{1-n}$.ªplasta"la curvatura producida por el término y^n. Esto significa que las alturas de las curvas de solución de y se reescalan"de manera no lineal, haciendo que la familia de curvas $u(x)$ tenga un comportamiento lineal (o más manejable), con tangentes que evolucionan de una forma que podemos integrar sistemáticamente con el factor integrante.

- Si se pudiera graficar $y(x)$ y su transformada $u(x)$ simultáneamente, se vería cómo las curvas complejas de y se corresponden con familias más regulares y predecibles de u .

- Los puntos donde u se anula pueden hacer que y .explote"(tienda a infinito) si la transformación implica raíces .

6.3. Comportamiento Cualitativo

Según el exponente n y los signos de $P(x)$ y $Q(x)$, las soluciones de Bernoulli pueden exhibir una variedad de comportamientos cualitativos :

- **Convergencia a cero o Explosión**: Las soluciones pueden converger a cero o explotar en tiempo finito, dependiendo de la potencia y los valores de $P(x)$, $Q(x)$ y la constante C .

- **Singularidades**: Pueden presentarse singularidades (puntos donde la solución deja de ser real o el denominador se anula) .
- **Soluciones constantes**: En ciertos casos, la ecuación puede admitir soluciones constantes, como la solución trivial $y \equiv 0$ (siempre que sea compatible con la EDO original y las condiciones iniciales).

Conclusión Parcial de la Sección 6

Las analogías y la visualización son poderosas herramientas pedagógicas que desmitifican la transformación de Bernoulli, revelando la elegancia con la que una estrategia de cambio de variable puede simplificar la complejidad no lineal . Al comprender cómo la sustitución .ªplana"la curvatura en un campo de pendientes o "desenreda"la ecuación, se afianza no solo el procedimiento, sino también la intuición fundamental sobre el comportamiento cualitativo de las soluciones . Esto transforma la resolución de EDOs de un mero cálculo en un ejercicio de comprensión profunda de las dinámicas subyacentes .

7. Ejemplos Prácticos Detallados y Problema de Consolidación

La aplicación práctica del método de Bernoulli es esencial para consolidar la comprensión de la teoría y las consideraciones críticas . Esta sección presenta ejemplos detallados que ilustran la transformación, resolución y recuperación de soluciones para diferentes valores de n, incluyendo el caso típico $n = 2$, un escenario con potencia negativa ($n = -1$) que introduce restricciones de dominio, y un ejemplo donde la ecuación se reduce a una lineal simple ($n = 0$) .
Se incluirá un problema de consolidación, que integra la teoría, el cálculo y la interpretación de resultados para un caso $n = 3$ con un coeficiente racional . Cada paso será meticulosamente explicado, desde la identificación de la ecuación y la sustitución, hasta la aplicación de condiciones iniciales, el cálculo del factor integrante, la resolución de la ecuación lineal y la cuidadosa determinación del dominio de validez de la solución final .

7.1. Ejemplo 1: Bernoulli con n = 2 (Un Caso Típico)

Ecuación: $\mathbf{y' + y = xy^2}$, con condición inicial $y(0) = 1$.

1. **Identificación del tipo de ecuación**: La ecuación de Bernoulli tiene

$$P(x) = 1, \quad Q(x) = x, \quad n = 2,$$

con $n \neq 0, 1$, por lo que aplicamos el método de Bernoulli.

2. **Sustitución inicial**: Definimos

$$u = y^{1-n} = y^{-1} = \frac{1}{y},$$

de donde también $y = 1/u$.

3. **Cálculo de la derivada de u**:

$$u' = (1-2)\, y^{-2}\, y' = -\, y^{-2}\, y' \quad \Longrightarrow \quad y' = -\, y^2\, u'.$$

4. **Transformación a una ecuación lineal en u**: Sustituimos y' en la EDO original,

$$-y^2 u' + y = x\, y^2.$$

Dividiendo por y^2 (válido pues $y \neq 0$ y $y(0) = 1$):

$$-u' + \frac{1}{y} = x \quad \Longrightarrow \quad -u' + u = x \quad \Longrightarrow \quad u' - u = -\, x.$$

5. **Factor integrante**: Para la ecuación $u' - u = -x$, tenemos $\widetilde{P}(x) = -1$ y

$$\mu(x) = e^{\int -1\, dx} = e^{-x}.$$

6. **Resolución de la ecuación en** u: Multiplicamos por $\mu(x)$:

$$\big(u\,e^{-x}\big)' = -x\,e^{-x}.$$

Integrando:

$$u\,e^{-x} = \int -x\,e^{-x}\,dx = (x+1)\,e^{-x} + C,$$

de donde

$$u(x) = x + 1 + C\,e^{x}.$$

7. **Determinación de la constante con la condición inicial**: Con $y(0) = 1$ sigue $u(0) = 1$, luego

$$1 = 0 + 1 + C\,e^{0} \implies C = 0.$$

8. **Solución particular en** y: Con $C = 0$, $u(x) = x + 1$ y por tanto

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{x+1}.}$$

9. **Dominio de validez y observaciones finales**:
   - El dominio natural es $x > -1$, asegurando $x + 1 \neq 0$.
   - La condición $y(0) = 1$ se verifica inmediatamente.
   - La solución trivial $y \equiv 0$ cumple la EDO pero no la condición inicial.

7.2. Ejemplo 2: Bernoulli con $\mathbf{n = -1}$ (Potencia Negativa y Restricciones de Dominio)

Ecuación: $\mathbf{y' - \frac{2}{x}y = x^3 y^{-1}}$, con condición inicial $y(1) = 1$.

1. **Identificación del tipo de ecuación**: La ecuación es de Bernoulli con

$$P(x) = -\frac{2}{x}, \quad Q(x) = x^3, \quad n = -1,$$

donde $n \neq 0, 1$, por lo que procede el método de Bernoulli.

2. **Sustitución adecuada**: Introducimos

$$u = y^{\,1-n} = y^2, \quad \implies \quad u' = 2\,y\,y'.$$

3. **Transformación a una ecuación lineal en** u: Aplicando la fórmula

$$u' + (1-n)\,P(x)\,u \;=\; (1-n)\,Q(x),$$

con $1 - n = 2$, obtenemos

$$u' + 2\big(-\tfrac{2}{x}\big)\,u = 2\,x^3 \quad \implies \quad u' - \frac{4}{x}\,u = 2\,x^3.$$

4. **Cálculo del factor integrante**: Definimos $\widetilde{P}(x) = -\frac{4}{x}$, luego

$$\mu(x) = \exp\Big(\int -\tfrac{4}{x}\,dx\Big) = e^{-4\ln|x|} = |x|^{-4}.$$

Para $x > 0$ (por la condición $y(1) = 1$) tomamos $\mu(x) = x^{-4}$.

5. **Resolución de la ecuación para** u: Multiplicamos la ecuación lineal por $\mu(x)$:

$$\big(u\,x^{-4}\big)' = 2\,x^3\,x^{-4} = 2\,x^{-1}.$$

Integrando:

$$u\,x^{-4} = \int 2\,x^{-1}\,dx = 2\ln|x| + C,$$

de donde

$$u(x) = x^4\big(2\ln|x| + C\big).$$

6. **Recuperación de la función** y: Puesto que $u = y^2$, se tiene

$$y = \pm\sqrt{u} = \pm x^2\sqrt{2\ln|x| + C}.$$

7. **Determinación de la constante mediante la condición inicial**: Con $y(1) = 1$, resulta

$$u(1) = 1^2 = 1 = 1^4\big(2\ln(1) + C\big) \implies C = 1.$$

   Y, como se exige $y(1) = 1 > 0$, elegimos la rama positiva.

8. **Solución final particular**: Finalmente,

$$\boxed{y(x) = x^2\sqrt{2\ln x + 1}, \quad x > 0.}$$

9. **Dominio de validez y condiciones adicionales**:
   - $x > 0$ (para que $\ln x$ esté definida y coincide con la condición inicial).
   - La raíz exige $2\ln x + 1 \geq 0$, es decir

$$\ln x \geq -\tfrac{1}{2} \implies x \geq e^{-1/2} \approx 0{,}60653.$$

   - El punto $x = 0$ es singular en la ecuación original.
   - La solución trivial $y \equiv 0$ no es válida aquí, pues implicaría divisiones por y^{-1}.

7.3. Ejemplo 3: n = 0 (Reducción a Lineal Directo)

Ecuación: $\mathbf{y' - \frac{2}{x}y = x^2}$.

1. **Identificación**: Aquí $n = 0$ (ya que $x^2 = x^2y^0$). La ecuación ya es lineal: $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = -2/x$ y $q(x) = x^2$.
2. **Factor Integrante**: $\mu(x) = e^{\int -2/x dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$.
3. **Resolver para y**: Multiplicamos: $(x^{-2}y)' = x^{-2} \cdot x^2 = 1$. Integramos: $x^{-2}y = x + C$. Despejamos y: $\mathbf{y = x^3 + Cx^2}$.
4. **Dominio y Verificaciones**: Válida para $x \neq 0$.

7.4. Problema de Consolidación: n = 3 (Teoría + Cálculo + Interpretación)

Problema: Resolver la ecuación $\mathbf{y' + \frac{2}{x}y = x^2y^3}$, con la condición inicial $\mathbf{y(1) = 1}$.

1. **Identificación y sustitución**: Dado que la ecuación es de Bernoulli con

$$P(x) = \frac{2}{x}, \quad Q(x) = x^2, \quad n = 3,$$

   y $n \neq 0, 1$, aplicamos la sustitución

$$u = y^{\,1-3} = y^{-2}.$$

2. **Transformación a ecuación lineal en** u: Partiendo de la forma

$$u' + (1 - n)\,P(x)\,u = (1 - n)\,Q(x),$$

   con $1 - n = -2$, obtenemos

$$u' - \frac{4}{x}\,u = -2\,x^2.$$

3. **Cálculo del factor integrante**: Sea $\widetilde{P}(x) = -\frac{4}{x}$. Entonces

$$\mu(x) = \exp\Big(\int -\tfrac{4}{x}\,dx\Big) = e^{-4\ln|x|} = |x|^{-4}.$$

   Para $x > 0$ (por la condición $y(1) = 1$), tomamos $\mu(x) = x^{-4}$.

4. **Resolución de la ecuación para** u: Multiplicamos por $\mu(x)$:

$$\left(u\,x^{-4}\right)' = -2\,x^2\,x^{-4} = -2\,x^{-2}.$$

Integrando,

$$u\,x^{-4} = \int -2\,x^{-2}\,dx = 2\,x^{-1} + C,$$

y despejamos

$$u(x) = 2\,x^3 + C\,x^4.$$

5. **Aplicación de la condición inicial**: De $y(1) = 1$ se sigue

$$u(1) = 1^{-2} = 1, \quad 1 = 2 \cdot 1^3 + C \cdot 1^4 \implies C = -1.$$

6. **Solución particular en** y: Con $u(x) = 2x^3 - x^4 = x^3(2 - x)$,

$$y = u^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Como $y(1) = 1 > 0$, elegimos la rama positiva:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3\,(2-x)}} = \frac{1}{x^{3/2}\,\sqrt{2-x}}}.$$

7. **Dominio de validez y verificación**:
   - $x > 0$ (para evitar singularidad en $x^{3/2}$).
   - $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$ (para que la raíz sea real).
   - $0 < x < 2$ es el dominio donde $y(x)$ está bien definida y contiene $x = 1$.
   - La función $y \equiv 0$ también satisface la EDO original,

$$0 + 0 = x^2 \cdot 0^3,$$

pero no cumple la condición $y(1) = 1$.

Conclusión Parcial de la Sección 7

Los ejemplos prácticos son fundamentales para solidificar la teoría de las ecuaciones de Bernoulli, mostrando la aplicación directa del método de transformación y resolución. La diversidad de casos, desde el típico $n = 2$ hasta potencias negativas o casos lineales, resalta la versatilidad del método y la importancia de las consideraciones prácticas . El problema de consolidación, al integrar teoría, cálculo y una interpretación rigurosa del dominio, ejemplifica la profundidad de análisis requerida para obtener soluciones completas y válidas en el contexto de las EDOs .

3. Red Conceptual: Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli

- **Resumen Breve y Categorizado**
  - **Definición y Naturaleza:** La ecuación de Bernoulli es una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de primer orden no lineal de la forma $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ [1-12]. Aunque no lineal en su forma original, puede transformarse en una ecuación lineal .
  - **Propósito Principal:** El objetivo central es convertir la ecuación no lineal en una ecuación lineal en una nueva variable, lo que permite resolverla sistemáticamente utilizando el método del factor integrante .
  - **Importancia y Aplicabilidad:** Es una herramienta fundamental en modelado matemático. Aparece en modelos de crecimiento con retroalimentación no lineal (e.g., dinámica de poblaciones, modelos logísticos), problemas de mezclas, modelos económicos y de control, y en física (fricción no lineal, circuitos) . Enseña la habilidad crucial de buscar la variable adecuada que "linealice.[el] problema .
  - **Técnica Central:** La transformación clave es la sustitución $u = y^{1-n}$ (o $z = y^{1-n}$) para $n \neq 0, 1$.
- **Conceptos Principales**
  - **Ecuación de Bernoulli:** EDO de primer orden con un término no lineal en forma de potencia y^n .
  - **Funciones $P(x)$ o $p(x)$ y $Q(x)$ o $q(x)$:** Coeficientes conocidos, generalmente continuos en un intervalo I .
  - **Exponente n:** Número real que define la no linealidad .
  - **Linealidad/No Linealidad:**
    - Si $n = 0$: La ecuación es lineal ($y' + P(x)y = Q(x)$) .
    - Si $n = 1$: La ecuación es lineal homogénea ($y' + (P(x) - Q(x))y = 0$) .
    - Si $n \neq 0, 1$: La ecuación es no lineal y requiere la sustitución de Bernoulli .
  - **Sustitución Fundamental:** La transformación $u(x) = y(x)^{1-n}$ (o $z(x) = y(x)^{1-n}$) para $n \neq 1$, que convierte la EDO de Bernoulli en una EDO lineal de primer orden en u (o z) .
  - **Ecuación Lineal en u (o z):** La forma $u' + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$.
  - **Factor Integrante $\mu(x)$:** Función $\exp\left(\int \tilde{P}(x)dx\right)$ utilizada para resolver la ecuación lineal resultante .
  - **Condiciones Iniciales:** Valores $y(x_0) = y_0$ utilizados para determinar la constante de integración C y, en su caso, la rama de la solución (ej. signo de una raíz) .
  - **Restricciones de Dominio:** Limitaciones sobre x o y debido a la presencia de logaritmos ($\ln(g(x)) \Rightarrow g(x) > 0$), raíces pares ($\sqrt{h(x)} \Rightarrow h(x) \geq 0$), denominadores (evitar división por cero), o puntos singulares de $P(x), Q(x)$.
  - **Soluciones Triviales o Singulares ($y \equiv 0$):** Posibles soluciones que la sustitución $u = y^{1-n}$ puede ignorar y que deben verificarse por separado .
  - **Existencia y Unicidad:** La continuidad de $P(x), Q(x)$ y, para $y \neq 0$, las propiedades de Lipschitz de la función $f(x, y)$ (donde $y' = f(x, y)$) aseguran la existencia y unicidad local de las soluciones .
- **Axiomas/Postulados**
  - **Continuidad de Coeficientes:** Las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ (o $p(x)$ y $q(x)$) deben ser continuas en el intervalo de interés I . Esto es fundamental para la teoría de existencia y unicidad de las EDO lineales resultantes.
  - **Supuesto Implícito $y \neq 0$ para la Sustitución:** La transformación $u = y^{1-n}$ (o $z = y^{1-n}$) requiere implícitamente que $y(x) \neq 0$ en el intervalo considerado, especialmente si $1 - n \leq 0$.

- **Condición de Lipschitz (para Unicidad cerca de $y = 0$):** Para garantizar la unicidad de soluciones que pasan por $y = 0$, la función $f(x, y) = -P(x)y + Q(x)y^n$ debe satisfacer condiciones de Lipschitz en y cerca de la condición inicial.

▪ **Relaciones y Aplicaciones Clave**

- **Relación con Ecuaciones Lineales de Primer Orden:** La conexión es fundamental, ya que la ecuación de Bernoulli se transforma directamente en una lineal en una nueva variable .
- **Uso del Método del Factor Integrante:** Es el método estándar para resolver la ecuación lineal resultante en u (o z) .
- **Relación con Ecuaciones de Riccati:** Las ecuaciones de Bernoulli son un caso especial de las ecuaciones de Riccati. Dominar Bernoulli ayuda a entender la linealización de Riccati y otras transformaciones .
- **Concepto General de Transformaciones en EDOs:** La sustitución $u = y^{1-n}$ es un ejemplo canónico de cómo buscar la variable adecuada puede simplificar drásticamente la estructura del problema, una técnica recurrente en muchas EDOs (homogéneas, exactas, etc.) .
- **Teoría de Existencia y Unicidad:** La aplicación de Bernoulli se apoya en los teoremas de existencia y unicidad (como Picard-Lindelöf) para ecuaciones lineales, heredando estas propiedades para la solución transformada .
- **Análisis de Campos de Pendientes:** Permite visualizar cómo la no linealidad afecta las trayectorias de las soluciones y cómo la transformación .ªplana.º rectifica.el campo, haciendo que las curvas de $u(x)$ sean más regulares y predecibles.
- **Aplicaciones Específicas:**
  - **Modelos de Crecimiento Logístico y Saturación:** Casos particulares de Bernoulli con $n = 2$ y parámetros adecuados, relevantes en dinámica de poblaciones y procesos económicos .
  - **Modelos Económicos y de Control:** Donde la respuesta del sistema depende no linealmente de su estado .
  - **Problemas de Mezclas:** Con tasas de cambio que dependen no linealmente de la concentración .
  - **Física e Ingeniería:** Modelos de fricción no lineal, circuitos eléctricos con no linealidades de potencia .

▪ **Secuencia Lógica del Cálculo del Tema (Procedimiento Paso a Paso)**

- **1. Identificar la Forma Estándar:** Asegurarse de que la EDO esté escrita en la forma canónica $\mathbf{y' + P(x)y = Q(x)y^n}$.
- **2. Verificar el Exponente n:**
  - Si $n = 0$ o $n = 1$: La ecuación es lineal. Resolver directamente con el factor integrante estándar .
  - Si $n \neq 0, 1$: Proceder con los siguientes pasos para la transformación de Bernoulli .
- **3. Realizar la Sustitución Fundamental:** Definir la nueva variable $\mathbf{u(x) = y(x)^{1-n}}$.
  - *Razón:* Su derivada contiene el factor $y^{-n}y'$ que permite cancelar la no linealidad .
- **4. Transformar a Ecuación Lineal en u:**
  - Calcular la derivada de la sustitución: $\mathbf{u' = (1 - n)y^{-n}y'}$.
  - Multiplicar la EDO original por $(1 - n)y^{-n}$.
  - Sustituir u' y u para obtener la ecuación lineal: $\mathbf{u' + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)}$.
  - *Razón:* El factor y^{-n} cancela y^n, y y^{1-n} se convierte en u, linealizando la ecuación .
- **5. Resolver la Ecuación Lineal para u:**
  - Calcular el Factor Integrante: $\mu(\mathbf{x}) = \exp\left(\int \mathbf{(1 - n)P(x)dx}\right)$.
  - Multiplicar la ecuación lineal por $\mu(x)$: $(\mu(x)u(x))' = \mu(x)(1 - n)Q(x)$.
  - Integrar ambos lados y despejar $u(x)$: $\mathbf{u(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)(1 - n)Q(x)dx + C\right)}$.

- *Razón:* El factor integrante convierte el lado izquierdo en la derivada de un producto, facilitando la integración directa .

- **6. Recuperar la Solución Original $y(x)$:** Usar la sustitución inversa: $\mathbf{y(x) = u(x)^{1/(1-n)}}$.
- *Razón:* Para obtener la solución en términos de la variable original del problema .
- **7. Aplicar Condiciones Iniciales (si dadas):** Sustituir $y(x_0) = y_0$ para determinar el valor de la constante C .
- **8. Analizar Dominio de Validez y Elección de Rama:**
  - Verificar que los argumentos de logaritmos sean positivos (> 0) y los de raíces pares sean no negativos (≥ 0) .
  - Identificar puntos singulares de $P(x)$ o $Q(x)$.
  - Si la recuperación de y implica una raíz par (ej. $y = \pm\sqrt{u}$), la condición inicial fija la rama (signo) correcta .
- **9. Verificar Solución Trivial $y \equiv 0$:** Sustituir $y \equiv 0$ en la EDO original para comprobar si es una solución válida (la sustitución la ignora) . Si la EDO original contiene potencias negativas de y (ej. y^{-1}), entonces $y \equiv 0$ no es solución .

Ecuaciones Diferenciales Exactas de Primer Orden

toobaziti

Disclaimer: Este documento se ha elaborado a partir de la grabación de una clase, la presentación visual consultada y/o el material bibliográfico recomendado. Dada la naturaleza de su composición, podría contener imprecisiones u omisiones derivadas de la calidad del audio, interrupciones involuntarias o errores de redacción. Se recomienda siempre consultar la grabación o fuente original correspondiente para confirmar cualquier detalle en caso de duda.

Índice

1. Ecuaciones Diferenciales Exactas: Fundamentos y Método de Resolución **1**
1.1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Exactas 1
1.1.1. Definición de Ecuación Diferencial Exacta 1
1.1.2. Condición de Exactitud (o Criterio de Simetría) 1
1.1.3. Algoritmo para Reconstruir la Función Potencial Ψ 2
1.1.4. Aplicaciones Prácticas y Ejemplos Calculados 3
1.1.5. Problema de Consolidación: Costo Total a partir de Parciales 4
1.2. Análisis e Ideas Clave de las Ecuaciones Diferenciales Exactas 5
1.3. Conclusiones Parciales: Ecuaciones Diferenciales Exactas 5

2. Factores Integrantes para Ecuaciones No Exactas **5**
2.1. Introducción a los Factores Integrantes 5
2.1.1. El Problema de las Ecuaciones No Exactas 5
2.1.2. Concepto y Deducción de Factores Integrantes 6
2.1.3. Algoritmo de Resolución con Factores Integrantes 7
2.1.4. Aplicaciones Prácticas y Ejemplos Calculados 7
2.1.5. Problema de Consolidación: Política como Reescalamiento 8
2.2. Análisis e Ideas Clave de los Factores Integrantes 9

1. Ecuaciones Diferenciales Exactas: Fundamentos y Método de Resolución

1.1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Exactas

Las Ecuaciones Diferenciales Exactas (EDE) de primer orden representan un pilar fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Su relevancia no solo radica en la sistematicidad de su resolución, sino también en las profundas implicaciones conceptuales que conllevan. Este tipo de ecuaciones nos permite identificar la existencia de una función potencial subyacente, cuyas curvas de nivel constituyen las soluciones de la EDO, estableciendo un puente crucial entre el cálculo diferencial y las aplicaciones prácticas en diversas disciplinas.
En esta sección, se definirá formalmente una EDO exacta y su representación estándar como una 1-forma diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$. Se presentará la definición clave de función potencial $\Psi(x,y)$, explicando cómo sus derivadas parciales se relacionan con M y N. Un componente central será la **condición de exactitud o de simetría** ($\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$), su fundamento en el Teorema de Clairaut y las consideraciones topológicas de regiones simplemente conexas. Posteriormente, se detallará un **algoritmo sistemático** para reconstruir la función potencial Ψ, destacando buenas prácticas, errores comunes y la interpretación geométrica y económica de las soluciones como curvas de nivel. Finalmente, se abordará un problema de consolidación con resolución escalonada.

1.1.1. Definición de Ecuación Diferencial Exacta

Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de primer orden se puede expresar en su forma diferencial estándar como :

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones reales (habitualmente continuas y diferenciables) definidas en una región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$. La ecuación se denomina **exacta** si existe una función $\Psi(x,y)$, llamada **función potencial** o **función de estado**, de clase C^1 (es decir, con primeras derivadas parciales continuas), tal que sus derivadas parciales coinciden con M y N respectivamente :

$$\Psi x = M(x,y), \tag{2}$$
$$\Psi y = N(x,y). \tag{3}$$

En este caso, la EDO se reduce al diferencial total de Ψ, es decir, $d\Psi = \Psi_x\,dx + \Psi_y\,dy = M\,dx + N\,dy = 0$. Las **soluciones implícitas** de la EDO son las **curvas de nivel** de la función potencial Ψ, dadas por :

$$\Psi(x,y) = C \tag{4}$$

donde C es una constante . La magnitud Ψ se mantiene constante a lo largo de cualquier trayectoria solución de la ecuación .
Intuición matemática: Imagina $\Psi(x,y)$ como la **altura** de un terreno en un mapa . Las curvas $\Psi(x,y) = C$ son las líneas de igual altura (curvas de nivel) . Si te mueves a lo largo de una de estas curvas, tu altura Ψ no cambia ($d\Psi = 0$). Una EDO exacta describe precisamente este tipo de movimiento . El vector gradiente $\nabla\Psi = (\Psi_x, \Psi_y) = (M, N)$ indica la dirección de máximo ascenso en el terreno; las soluciones se desplazan tangencialmente a las curvas de nivel, por lo que son perpendiculares al gradiente . La exactitud es análoga a la idea de un **campo vectorial conservativo** en cálculo vectorial, lo que implica independencia del camino y rotacional nulo .

1.1.2. Condición de Exactitud (o Criterio de Simetría)

Para que una EDO $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ sea exacta, debe satisfacerse una condición crucial. Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones de clase C^1 (con primeras derivadas parciales continuas) en una región $\mathcal{R}$ que además es **simplemente conexa**, entonces la ecuación es exacta si y solo si :

$$\boxed{My = Nx} \tag{5}$$

Esta igualdad es **necesaria y suficiente** bajo las hipótesis mencionadas .
Fundamento teórico: Esta condición se deriva del **Teorema de Clairaut** (también conocido como Teorema de Schwarz o Young) sobre la conmutatividad de las derivadas mixtas . Si existe una función

potencial Ψ tal que $\Psi_x = M$ y $\Psi_y = N$, y si Ψ tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces $\Psi_{xy} = \Psi_{yx}$. Sustituyendo, obtenemos $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. La implicación inversa (si $M_y = N_x$, entonces es exacta) requiere que la región sea **simplemente conexa** (sin .ªgujeros"), aunque en cursos básicos usualmente trabajamos con dominios donde esta sutileza no es un problema.
Importancia práctica: Esta condición proporciona un **test rápido y esencial** para verificar la exactitud de una EDO antes de intentar resolverla, evitando así integrar en vano .

1.1.3. Algoritmo para Reconstruir la Función Potencial Ψ

Si la ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ ha sido verificada como exacta, el siguiente paso es reconstruir la función potencial $\Psi(x,y)$. Existen dos métodos simétricos; se recomienda elegir el que simplifique las integrales .

Método A: Integrando $M(x,y)$ respecto de x

1. **Integración parcial de M respecto a x:** Integra $M(x,y)$ con respecto a x, tratando a y como una constante. Se debe añadir una función $h(y)$, que actúa como çonstante de integración"pero que puede depender de y, ya que su derivada respecto a x sería cero :

$$\Psi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y) \tag{6}$$

2. **Determinación de $h(y)$ mediante $N(x,y)$:** Deriva la expresión obtenida para $\Psi(x,y)$ en el paso anterior con respecto a y. Luego, **equiparala** con $N(x,y)$, la segunda componente de la EDO original, dado que sabemos que $\Psi_y = N$:

$$\Psi y = y\Big[\int M(x,y)\,dx\Big] + h'(y) \stackrel{!}{=} N(x,y) \tag{7}$$

   De esta igualdad, despeja $h'(y)$. Una vez que tengas $h'(y)$, integra esta expresión con respecto a y para obtener $h(y)$ (ignorando la constante de integración, ya que esta se incluirá en la C final de la solución) .

3. **Formulación de la solución implícita:** Sustituye la función $h(y)$ encontrada en la expresión original de $\Psi(x,y)$. La **solución general** de la EDO exacta es $\Psi(x,y) = C$, donde C es una constante arbitraria . Si se proporciona una **condición inicial** $y(x_0) = y_0$, puedes calcular el valor de $C = \Psi(x_0, y_0)$ para obtener la solución particular .

Método B: Integrando $N(x,y)$ respecto de y Este método es análogo al Método A, pero se invierten los roles de x e y y de M y N.

1. **Integración parcial de N respecto a y:**

$$\Psi(x,y) = \int N(x,y)\,dy + g(x) \tag{8}$$

   donde $g(x)$ es una función desconocida que puede depender de x .

2. **Determinación de $g(x)$ mediante $M(x,y)$:** Deriva $\Psi(x,y)$ respecto a x y **equiparala** con $M(x,y)$, dado que $\Psi_x = M$:

$$\Psi x = x\Big[\int N(x,y)\,dy\Big] + g'(x) \stackrel{!}{=} M(x,y) \tag{9}$$

   De aquí se despeja $g'(x)$ y se integra respecto a x para obtener $g(x)$.

3. **Formulación de la solución implícita:** Sustituye $g(x)$ en $\Psi(x,y)$ y escribe la solución general como $\Psi(x,y) = C$.

Buenas Prácticas y Chequeos :

- **Chequear exactitud primero:** Siempre verificar $M_y = N_x$ antes de iniciar la integración para no perder tiempo .
- **Atención al dominio:** Identificar las restricciones de las funciones (ej., $\ln y \Rightarrow y > 0$; denominadores no nulos) .
- **Validar con derivadas:** Tras encontrar Ψ, confirmar que sus derivadas parciales Ψ_x y Ψ_y coincidan con M y N respectivamente .

Errores Frecuentes :

- Tratar $h(y)$ o $g(x)$ como una constante numérica, en lugar de una función de la otra variable .
- Diferenciar/integrar sin respetar qué variable es **constante** en cada paso .
- Omitir el test $M_y = N_x$ y perder tiempo en una ecuación **no exacta** .

1.1.4. Aplicaciones Prácticas y Ejemplos Calculados

Las ecuaciones exactas surgen naturalmente en diversos campos, especialmente en economía, donde reflejan la existencia de funciones de estado subyacentes.

Interpretación Económica : La función potencial $\Psi(x, y)$ puede representar magnitudes económicas como:

- **Función de Utilidad ($U(x, y)$):** Las soluciones $\Psi(x, y) = C$ son **curvas de indiferencia**, que muestran combinaciones de bienes que otorgan el mismo nivel de satisfacción . Resolver $dU = 0$ equivale a encontrar estas combinaciones.
- **Función de Costo Total ($C(q, w)$):** Las soluciones $\Psi(x, y) = C$ son **isocostos**, representando combinaciones de factores que implican un costo constante .
- **Función de Producción ($\Phi(K, L)$):** Las soluciones $\Psi(x, y) = C$ son **isoquantas**, indicando combinaciones de insumos que producen un nivel constante de output .
- **Función de Ganancia ($\Pi(p, q)$):** La exactitud implica consistencia en los ingresos y costos marginales, permitiendo reconstruir la función de ganancia .

La condición de simetría $M_y = N_x$ se vincula con requerimientos de integrabilidad y la consistencia de efectos marginales, como la simetría del efecto sustitución en Slutsky .

Ejemplo Calculado 1: Ecuación Polinómica Simple (Exacta) Resolver: $(2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0$.

1. **Verificar exactitud :** Identificamos $M(x, y) = 2xy + y^2$ y $N(x, y) = x^2 + 2xy$. Calculamos las derivadas parciales cruzadas: $My = y(2xy + y^2) = 2x + 2y$. $Nx = x(x^2 + 2xy) = 2x + 2y$. Como $M_y = N_x$, la ecuación **es exacta** .
2. **Reconstruir Ψ (Método A) :** Integramos $M(x, y)$ con respecto a x, tratando y como constante:
$$\Psi(x, y) = \int (2xy + y^2)\,dx = x^2y + xy^2 + h(y).$$
3. **Determinar $h(y)$:** Derivamos la expresión de Ψ con respecto a y e igualamos a $N(x, y)$:
$$\Psi y = y(x^2y + xy^2 + h(y)) = x^2 + 2xy + h'(y).$$
Entonces, $x^2 + 2xy + h'(y) \stackrel{!}{=} x^2 + 2xy$. Esto implica que $h'(y) = 0$, por lo tanto, $h(y) = C_0$ (una constante, que se absorberá en la C final) .
4. **Solución General :** Sustituimos $h(y)$ en $\Psi(x, y)$: $\boxed{x^2y + xy^2 = C}$.

Ejemplo Calculado 2: Ecuación con Exponenciales y Logaritmos (Exacta) Resolver: $(y + e^x)\,dx + (x + \ln y)\,dy = 0$.

1. **Verificar exactitud :** $M(x,y) = y + e^x \Rightarrow M_y = 1$. $N(x,y) = x + \ln y \Rightarrow N_x = 1$. Como $M_y = N_x$, la ecuación **es exacta** (el dominio requiere $y > 0$ por el término $\ln y$) .

2. **Reconstruir Ψ (Método A) :** Integramos $M(x,y)$ con respecto a x:

$$\Psi(x,y) = \int (y + e^x)\,dx = xy + e^x + h(y).$$

3. **Determinar $h(y)$]:** Derivamos respecto a y e igualamos a $N(x,y)$:

$$\Psi y = x + h'(y).$$

Entonces, $x + h'(y) \stackrel{!}{=} x + \ln y$. Esto da $h'(y) = \ln y$. Integrando, $h(y) = y\ln y - y$ (usando integración por partes para $\int \ln y\,dy = y\ln y - y$).

4. **Solución General :** Sustituimos $h(y)$ en $\Psi(x,y)$: $\boxed{xy + e^x + y\ln y - y = C}$ (para $y > 0$).

1.1.5. Problema de Consolidación: Costo Total a partir de Parciales

Supongamos que un productor tiene una función de costo $C(q,w)$ (donde q es la cantidad producida y w es un índice salarial), y se observan sus derivadas parciales como:

$$Cq = 2qw + 3, \qquad Cw = q^2 + w.$$

Tarea:

1. Verificar si existe una función de costo total $C(q,w)$ que genere estas parciales.
2. En caso afirmativo, encontrar dicha función.
3. Interpretar el resultado en términos económicos.

Solución Escalona:

1. **Verificar exactitud :** Identificamos $M(q,w) = 2qw + 3$ y $N(q,w) = q^2 + w$. (Aquí, las variables son q y w en lugar de x e y). Calculamos las derivadas parciales cruzadas: $Mw = w(2qw + 3) = 2q$. $Nq = q(q^2 + w) = 2q$. Como $Mw = Nq$, la condición de exactitud se cumple. Esto **garantiza la existencia** de una función de costo total $C(q,w)$ que genera las derivadas parciales dadas [40, 80, 88].

2. **Encontrar la función de costo total $C(q,w)$:** Integramos $M(q,w)$ respecto a q, tratando w como constante:

$$C(q,w) = \int (2qw + 3)\,dq = q^2w + 3q + \phi(w).$$

Ahora, derivamos esta expresión respecto a w y la igualamos a $N(q,w)$:

$$Cw = q^2 + \phi'(w).$$

Equiparando: $q^2 + \phi'(w) \stackrel{!}{=} q^2 + w$. Esto implica $\phi'(w) = w$. Integrando respecto a w: $\phi(w) = \frac{1}{2}w^2$. Sustituyendo $\phi(w)$ de vuelta en la expresión de $C(q,w)$:

$$\boxed{C(q,w) = q^2w + 3q + \tfrac{1}{2}w^2 + \text{const}}.$$

3. **Interpretación económica :** La existencia de la función $C(q,w)$ indica que los costos marginales reportados ($C_q = 2qw + 3$) y la sensibilidad del costo a los salarios ($C_w = q^2 + w$) son **coherentes** con una única función de costo total. La simetría $C_{qw} = C_{wq}$ es un análogo de las condiciones de simetría en teoría dual de la producción (como el Lema de Shephard), asegurando la integrabilidad y la consistencia de las demandas condicionadas de factores . Las çurvas de nivel"$C(q,w) = \bar{C}$ representarían isocostos para un nivel de costo total fijo.

1.2. Análisis e Ideas Clave de las Ecuaciones Diferenciales Exactas

Intuición matemática detrás de los conceptos con ejemplos con lenguaje No técnico: Imagina que tienes un mapa de un terreno montañoso. La .exactitud"significa que el terreno real **existe** y es consistente. La función potencial $\Psi(x, y)$ es como la altura de cada punto en el mapa. Si caminas por una çurva de nivel"($\Psi = C$), no subes ni bajas; te mantienes a la misma altura. La EDO exacta te dice cómo moverte para mantener esa altura constante. Los términos M y N son como las "pendientes.en las direcciones x e y que te llevarían a subir o bajar. La condición $M_y = N_x$ es la clave: si las pendientes están "bien alineadas"(como en una montaña real), entonces puedes estar seguro de que existe una altura Ψ subyacente . Si no, es como si el mapa tuviera errores y no hubiera un terreno consistente detrás .
En economía, Ψ puede ser tu nivel de satisfacción (utilidad), el costo de producir algo, o la cantidad que puedes producir. Las çurvas de nivel"son entonces curvas de indiferencia, isocostos o isoquantas, donde el bienestar, el costo o la producción se mantienen constantes. La exactitud en estos modelos significa que los efectos marginales (cómo cambia tu satisfacción al consumir un poco más de x o y) son **consistentes** y provienen de una función subyacente que realmente existe . Es un "test de coherencia"para tus modelos .

1.3. Conclusiones Parciales: Ecuaciones Diferenciales Exactas

Las Ecuaciones Diferenciales Exactas son fundamentales para comprender sistemas donde una magnitud subyacente Ψ se conserva. La condición de simetría $M_y = N_x$ es el criterio esencial para su identificación, garantizando la existencia de Ψ en regiones simplemente conexas . Su método de resolución, basado en integración parcial y ajuste, es sistemático y robusto. Conceptualmente, las soluciones son curvas de nivel de Ψ, lo que permite interpretaciones valiosas en geometría y economía .

2. Factores Integrantes para Ecuaciones No Exactas

2.1. Introducción a los Factores Integrantes

No todas las EDO de primer orden son exactas de forma natural. Cuando la condición de simetría $M_y = N_x$ no se cumple, la ecuación carece de una función potencial directa. Sin embargo, muchas de estas ecuaciones "no exactas"pueden transformarse en exactas mediante la multiplicación por una función auxiliar, conocida como factor integrante. Esta técnica amplía significativamente la clase de EDOs que pueden resolverse sistemáticamente.
Esta sección se dedicará a la teoría y aplicación de los factores integrantes. Se abordará el problema de las ecuaciones no exactas y la necesidad de un factor $\mu(x, y)$ que las convierta en exactas. Se explorará la deducción de las fórmulas para factores integrantes que dependen de una sola variable ($\mu(x)$ o $\mu(y)$), que son los casos más comunes y tratables. Se detallará el procedimiento para aplicar un factor integrante: multiplicarlo por la EDO original, verificar la nueva exactitud y luego resolver como una ecuación exacta. Se incluirán ejemplos prácticos y una discusión sobre la interpretación económica de los factores integrantes como "deflactores.o "descuentos".

2.1.1. El Problema de las Ecuaciones No Exactas

Una ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ se clasifica como **no exacta** si no cumple la condición de exactitud, es decir, si :

$$My \neq Nx \tag{10}$$

En este escenario, no existe una función potencial $\Psi(x, y)$ cuyas derivadas parciales sean directamente M y N. Por lo tanto, el método directo de integración parcial no es aplicable.
Intuición matemática: Si una EDO no es exacta, es como si las "pendientes"M y N de nuestro "mapa de alturas"no fueran consistentes; no hay una superficie de altura Ψ coherente que las genere. Intentar aplicar el método de las ecuaciones exactas a una ecuación no exacta resultaría en una contradicción al intentar determinar $h(y)$ o $g(x)$. Esto significa que, si diéramos "pequeños pasos"definidos por $M\,dx + N\,dy = 0$, el "trabajo neto"(cambio en Ψ) para ir de un punto a otro **dependería del camino** seguido, lo que contradice la naturaleza de una función potencial.

2.1.2. Concepto y Deducción de Factores Integrantes

Un **factor integrante** $\mu(x, y)$ es una función tal que, al multiplicar la EDO no exacta $M\,dx + N\,dy = 0$ por μ, la nueva ecuación resultante se convierte en exacta:

$$\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0 \tag{11}$$

Para que esta nueva ecuación sea exacta, debe cumplir la condición de exactitud :

$$y(\mu M) = x(\mu N) \tag{12}$$

Aplicando la regla del producto para las derivadas parciales, obtenemos :

$$M\mu y + \mu M y = N\mu x + \mu N x$$

$$M\mu y - N\mu x = \mu\Big(Nx - My\Big)$$

Esta ecuación diferencial parcial para μ es generalmente difícil de resolver. Sin embargo, en dos casos específicos, podemos encontrar μ de manera sistemática.

Caso 1: Factor Integrante μ depende solo de x, i.e., $\mu = \mu(x)$: Si μ es solo función de x, entonces $\mu y = 0$. La ecuación anterior se simplifica a [63]:

$$-N\frac{d\mu}{dx} = \mu\Big(Nx - My\Big)$$

Reordenando para encontrar $\frac{d\mu}{dx}/\mu$:

$$\frac{d\mu/dx}{\mu} = \frac{My - Nx}{N}$$

Para que μ dependa solo de x, el cociente $\frac{My-Nx}{N}$ debe ser una función que dependa **únicamente de** x, digamos $\phi(x)$. Si esto ocurre, el factor integrante es:

$$\boxed{\mu(x) = \exp\left(\int \frac{My - Nx}{N}\,dx\right)} \tag{13}$$

Caso 2: Factor Integrante μ depende solo de y, i.e., $\mu = \mu(y)$: Si μ es solo función de y, entonces $\mu x = 0$. La ecuación general se simplifica a :

$$M\frac{d\mu}{dy} = \mu\Big(Nx - My\Big)$$

Reordenando para encontrar $\frac{d\mu}{dy}/\mu$:

$$\frac{d\mu/dy}{\mu} = \frac{Nx - My}{M}$$

De manera análoga, para que μ dependa solo de y, el cociente $\frac{Nx-My}{M}$ debe ser una función que dependa **únicamente de** y, digamos $\psi(y)$. Si esto ocurre, el factor integrante es :

$$\boxed{\mu(y) = \exp\left(\int \frac{Nx - My}{M}\,dy\right)} \tag{14}$$

Intuición (no técnica): Un factor integrante μ es como una "llave de ajuste.º un çambio de escala local"que corrige un campo ïnconsistente"para volverlo çonservativo"]. Si el "mapa de alturas"no tiene sentido, μ lo reescala o "deflacta"de tal manera que, después de aplicarlo, las pendientes sí provengan de una altura Ψ consistente . En economía, μ puede ser un **descuento acumulado** (como en la valoración de bonos) o un **deflactor** que reexpresa precios o cantidades en ünidades deflactadas"donde la çontabilidad"del sistema çierraz revela una estructura de potencial coherente .

2.1.3. Algoritmo de Resolución con Factores Integrantes

Una vez que se ha identificado y calculado un factor integrante $\mu(x)$ o $\mu(y)$, el proceso para resolver la EDO es el siguiente:

1. **Multiplicar la EDO original por el factor integrante :** Toma la ecuación diferencial original $M\,dx + N\,dy = 0$ y multiplica cada término por el factor integrante μ que has encontrado. Esto transforma la ecuación en $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$.

2. **Verificar la exactitud de la nueva ecuación :** Ahora, con $M_{nueva} = \mu M$ y $N_{nueva} = \mu N$, calcula sus derivadas parciales cruzadas $(\mu M)_y$ y $(\mu N)_x$. Debido a cómo se dedujo μ, estas deben ser iguales, confirmando que la nueva ecuación **es exacta**. Si no son iguales, revisa tus cálculos de μ.

3. **Resolver la nueva EDO exacta :** Aplica el algoritmo estándar para resolver ecuaciones exactas (descrito en la Sección 1.1.3) a la ecuación $(\mu M)\,dx + (\mu N)\,dy = 0$. Es decir, integra μM respecto a x (o μN respecto a y), ajusta con la función de la otra variable ($h(y)$ o $g(x)$), y luego determina esa función derivando e igualando a la otra componente.

4. **Escribir la solución implícita :** La solución general será $\Psi(x, y) = C$, donde Ψ es la función potencial reconstruida de la ecuación exacta multiplicada por μ. Si hay condiciones iniciales, úsalas para encontrar la solución particular.

Cuándo no hay $\mu(x)$ ni $\mu(y)$ elementales: Si ninguno de los cocientes $\frac{My-Nx}{N}$ o $\frac{Nx-My}{M}$ resulta ser una función que depende de una **sola variable**, entonces no existe un factor integrante que sea función de solo x o solo y . En estos casos, podría existir un factor integrante más general $\mu(x, y)$, pero su búsqueda es considerablemente más compleja y excede el alcance de este documento, requiriendo métodos avanzados o ad-hoc .

2.1.4. Aplicaciones Prácticas y Ejemplos Calculados

Los factores integrantes son herramientas poderosas con diversas aplicaciones prácticas, especialmente en física e ingeniería para campos no conservativos, y en economía para sistemas reescalados.

Interpretación Económica de Factores Integrantes : En economía, el factor integrante a menudo tiene una interpretación intuitiva:

- **Deflactores o descuentos acumulados:** En finanzas continuas o macroeconomía con tasas variables, el factor integrante puede modelar un descuento acumulado que convierte flujos futuros a valores presentes, haciendo que el sistema çierre.[en] términos de valor. Por ejemplo, en el precio de un bono con cupón continuo, el factor integrante es $e^{\int r(t)\,dt}$, que capitaliza los flujos .
- **Normalizaciones o Políticas:** Si un modelo económico presenta ïnconsistencias"(no es exacto), un factor integrante puede modelar intervenciones de política económica (ej., impuestos, subsidios, regulaciones) o cambios en las unidades de medida que reescalan el sistema, revelando una estructura de potencial coherente subyacente .

Ejemplo Calculado 1: Ecuación no Exacta con $\mu(x)$ Resolver: $(xy)\,dx + (x^2)\,dy = 0$.

1. **Verificar exactitud :** $M(x, y) = xy \Rightarrow M_y = x$. $N(x, y) = x^2 \Rightarrow N_x = 2x$. Como $M_y \neq N_x$, la ecuación **no es exacta**.

2. **Buscar un factor integrante :** Probamos si existe un $\mu(x)$: $\frac{M_y-N_x}{N} = \frac{x-2x}{x^2} = \frac{-x}{x^2} = -\frac{1}{x}$. Como esta expresión depende solo de x, podemos usarla para encontrar $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{1}{x}\,dx\right) = \exp(-\ln|x|) = \exp(\ln|x|^{-1}) = \frac{1}{|x|}.$$

   Tomamos $\mu(x) = \frac{1}{x}$ (para $x \neq 0$).

3. **Multiplicar por el factor integrante y verificar exactitud:** Multiplicamos la EDO original por $\mu(x) = \frac{1}{x}$:
$$\frac{1}{x}(xy)\,dx + \frac{1}{x}(x^2)\,dy = 0 \Rightarrow y\,dx + x\,dy = 0.$$
Ahora, para la nueva ecuación, $M_{nueva} = y$ y $N_{nueva} = x$. $M_{nueva,y} = 1$. $N_{nueva,x} = 1$. Como $M_{nueva,y} = N_{nueva,x}$, la nueva ecuación **es exacta**.
4. **Reconstruir Ψ para la ecuación exacta (Método A):** Integramos $M_{nueva} = y$ con respecto a x:
$$\Psi(x,y) = \int y\,dx = xy + h(y).$$
5. **Determinar $h(y)$:** Derivamos Ψ respecto a y e igualamos a $N_{nueva} = x$:
$$\Psi y = x + h'(y).$$
Entonces, $x + h'(y) \stackrel{!}{=} x$. Esto implica $h'(y) = 0$, por lo tanto, $h(y) = C_0$.
6. **Solución General:** $\boxed{xy = C}$.

Ejemplo Calculado 2: Ecuación no Exacta con $\mu(y)$ Resolver: $(y^2)\,dx + (xy)\,dy = 0$.

1. **Verificar exactitud :** $M(x,y) = y^2 \Rightarrow M_y = 2y$. $N(x,y) = xy \Rightarrow N_x = y$. Como $M_y \neq N_x$, la ecuación **no es exacta**.
2. **Buscar un factor integrante :** Probamos si existe un $\mu(y)$: $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{y-2y}{y^2} = \frac{-y}{y^2} = -\frac{1}{y}$. Como esta expresión depende solo de y, podemos usarla para encontrar $\mu(y)$:
$$\mu(y) = \exp\left(\int -\frac{1}{y}\,dy\right) = \exp(-\ln|y|) = \exp(\ln|y|^{-1}) = \frac{1}{|y|}.$$
Tomamos $\mu(y) = \frac{1}{y}$ (para $y \neq 0$).
3. **Multiplicar por el factor integrante y verificar exactitud:** Multiplicamos la EDO original por $\mu(y) = \frac{1}{y}$:
$$\frac{1}{y}(y^2)\,dx + \frac{1}{y}(xy)\,dy = 0 \Rightarrow y\,dx + x\,dy = 0.$$
Ahora, para la nueva ecuación, $M_{nueva} = y$ y $N_{nueva} = x$. $M_{nueva,y} = 1$. $N_{nueva,x} = 1$. Como $M_{nueva,y} = N_{nueva,x}$, la nueva ecuación **es exacta**.
4. **Reconstruir Ψ para la ecuación exacta (Método A, o B) :** Integramos $M_{nueva} = y$ con respecto a x:
$$\Psi(x,y) = \int y\,dx = xy + h(y).$$
5. **Determinar $h(y)$:** Derivamos Ψ respecto a y e igualamos a $N_{nueva} = x$:
$$\Psi y = x + h'(y).$$
Entonces, $x + h'(y) \stackrel{!}{=} x$. Esto implica $h'(y) = 0$, por lo tanto, $h(y) = C_0$.
6. **Solución General:** $\boxed{xy = C}$.

2.1.5. Problema de Consolidación: Política como Reescalamiento

Consideremos el siguiente modelo diferencial en un contexto económico, donde y podría ser una cantidad y x un precio, pero las relaciones marginales iniciales no son consistentes:

$$y\,dx + 2x\,dy = 0.$$

Tarea:

1. Verificar si la ecuación es exacta.
2. Si no es exacta, encontrar un factor integrante adecuado (de una sola variable).
3. Resolver la ecuación utilizando el factor integrante.
4. Interpretar económicamente el rol del factor integrante en este contexto.

Solución Escalona:

1. **Verificar exactitud:** Identificamos $M(x,y) = y$ y $N(x,y) = 2x$. Calculamos las derivadas parciales cruzadas: $My = y(y) = 1$. $Nx = x(2x) = 2$. Como $M_y \neq N_x$ (es decir, $1 \neq 2$), la ecuación **no es exacta**.

2. **Buscar un factor integrante:** Probamos para $\mu(x)$: $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1-2}{2x} = -\frac{1}{2x}$. Esta expresión depende solo de x. Entonces, $\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{1}{2x}\,dx\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln|x|\right) = \exp(\ln|x|^{-1/2}) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Probamos para $\mu(y)$: $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2-1}{y} = \frac{1}{y}$. Esta expresión depende solo de y. Entonces, $\mu(y) = \exp\left(\int \frac{1}{y}\,dy\right) = \exp(\ln|y|) = |y|$. Elegiremos el factor integrante $\mu(y) = y$ (asumiendo $y > 0$ o trabajando con $|y|$). Tomamos $\mu(y) = y$ para simplificar, como en el ejemplo fuente.

3. **Resolver la ecuación utilizando el factor integrante:** Multiplicamos la EDO original por $\mu(y) = y$:
$$y(y)\,dx + y(2x)\,dy = 0 \Rightarrow y^2\,dx + 2xy\,dy = 0.$$
Ahora, para la nueva ecuación, $M_{nueva} = y^2$ y $N_{nueva} = 2xy$. Verificamos exactitud: $M_{nueva,y} = y(y^2) = 2y$. $N_{nueva,x} = x(2xy) = 2y$. Como $M_{nueva,y} = N_{nueva,x}$, la nueva ecuación **es exacta**. Reconstruimos Ψ (Método A): Integramos $M_{nueva} = y^2$ con respecto a x:
$$\Psi(x,y) = \int y^2\,dx = xy^2 + h(y).$$
Derivamos Ψ respecto a y e igualamos a $N_{nueva} = 2xy$:
$$\Psi y = 2xy + h'(y).$$
Entonces, $2xy + h'(y) \stackrel{!}{=} 2xy$. Esto implica $h'(y) = 0$, por lo tanto, $h(y) = C_0$. La solución general es $\boxed{xy^2 = C}$.

4. **Interpretación económica:** El factor integrante $\mu(y) = y$ puede interpretarse como una **política de reescalamiento** o un **deflactor** que se aplica a las variaciones del sistema . Antes de la aplicación de μ, las relaciones marginales ($M = y, N = 2x$) no eran coherentes con una función potencial única. La aplicación de la "política"(multiplicar por y) .ªjusta.el sistema de tal manera que ahora sí proviene del diferencial total de una función de estado subyacente $\Psi(x,y) = xy^2$. Este reescalamiento podría representar un impuesto o subsidio proporcional a la cantidad y, o una forma de "normalizar"los valores para que el sistema económico revele su coherencia interna y sea ïntegrable". Las soluciones $xy^2 = C$ representarían las çurvas de nivel"de este nuevo potencial ajustado.

2.2. Análisis e Ideas Clave de los Factores Integrantes

Intuición matemática detrás de los conceptos con ejemplos con lenguaje No técnico: Piensa de nuevo en nuestro mapa de alturas. Si el mapa está mal hecho y no hay una montaña real consistente (es decir, la EDO no es exacta), el "trabajo"(el cambio de altura) para ir de un punto A a un punto B depende del camino que tomes . Un factor integrante μ es como tener unas "gafas mágicas.º un "programa de edición de mapas"que modifica localmente las pendientes de ese mapa inconsistente. No crea una montaña de la nada, sino que ajusta las pendientes de tal manera que, con las "gafas"puestas, el terreno que ves **sí sea consistente** y el trabajo entre dos puntos deje de depender del camino. Después de aplicar μ, podemos dibujar las curvas de nivel de la nueva .ªltura.ªjustada Ψ, y esas curvas serán las soluciones.
En economía, si un modelo no es exacto, significa que las relaciones marginales (ej. utilidades marginales) no çierran.º no son internamente coherentes con una función de utilidad global. No hay .ªrbitraje.en un campo conservativo; si lo hay, el sistema es "no exacto". Un factor integrante puede ser visto como una política que çorrige"las distorsiones del mercado o un "deflactor"que cambia la unidad de medida para que las magnitudes se vuelvan comparables y el modelo sea consistente. Por ejemplo, en un entorno con inflación, los precios nominales pueden no ser exactos, pero si los "deflactamos"(multiplicamos por un factor integrante que descuenta la inflación), los precios reales sí revelan una estructura potencial.

Red Conceptual: Ecuaciones Diferenciales Exactas de Primer Orden

- **Resumen Breve y Categorizado**
  - **Definición fundamental:** Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de primer orden en la forma diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ es **exacta** si representa el diferencial total de una función potencial $\Psi(x,y)$.
  - **Soluciones:** Las soluciones implícitas de una EDO exacta son las **curvas de nivel** de la función potencial, dadas por $\Psi(x,y) = C$.
  - **Verificación:** La exactitud se verifica mediante la **condición de simetría** $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$.
  - **Reconstrucción:** El método de resolución implica la **integración parcial** de M o N y un ajuste posterior para determinar la función potencial Ψ .
  - **Aplicaciones:** Las EDO exactas son cruciales en **economía** (modelando funciones de utilidad, costos, producción, ganancia y trayectorias de equilibrio como curvas de indiferencia, isocostos, isoquantas) y **matemáticas** (análogas a campos conservativos, implicando independencia del camino) .
  - **Ecuaciones no exactas:** Aquellas que no cumplen la condición de simetría pueden a veces transformarse en exactas mediante un **factor integrante** $\mu(x,y)$.
- **Conceptos Principales**
  - **Forma diferencial de una EDO de primer orden:** $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, donde M y N son funciones continuas en una región .
  - **Ecuación Exacta:** Una EDO para la cual existe una función potencial $\Psi(x,y)$ tal que $\partial\Psi/\partial x = M(x,y)$ y $\partial\Psi/\partial y = N(x,y)$.
  - **Función Potencial ($\Psi(x,y)$):** También conocida como función de estado, de clase C^1, cuya existencia define la exactitud de la EDO .
  - **Condición de Exactitud (o de Simetría):** El criterio $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ que determina si una EDO es exacta .
  - **Derivadas Parciales Cruzadas:** Concepto clave del Teorema de Clairaut ($\Psi_{xy} = \Psi_{yx}$), subyacente a la condición de simetría .
  - **Región Simplemente Conexa:** Un dominio sin .ªgujeros"donde la condición de simetría es necesaria y suficiente para la exactitud .
  - **Soluciones Implícitas:** Las soluciones de una EDO exacta se expresan como $\Psi(x,y) = C$, representando curvas de nivel .
  - **Factor Integrante ($\mu(x,y)$):** Una función por la cual se multiplica una EDO no exacta para convertirla en exacta.
- **Axiomas/Postulados Clave**
  - **Regularidad (C^1):** Las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ deben ser continuamente diferenciables (clase C^1) en la región de interés para que la condición de simetría sea aplicable con seguridad .
  - **Teorema de Clairaut (o Schwarz/Young):** Postula que si una función Ψ tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces el orden de diferenciación no afecta el resultado, es decir, $\Psi_{xy} = \Psi_{yx}$. Este teorema es el fundamento teórico de la condición de exactitud.
- **Relaciones y Aplicaciones Clave**
  - **Relaciones Matemáticas:**
    - **Conservación de Ψ:** Para cualquier solución $(x(t), y(t))$, se cumple $d\Psi/dt = 0$, lo que significa que Ψ se mantiene constante a lo largo de las trayectorias solución .

- **Analogía con campos conservativos:** La exactitud de una EDO es análoga a la de un campo vectorial conservativo en cálculo vectorial. Esto implica que la integral de línea de dicho campo es independiente del camino y que el rotacional"del campo es nulo .
- **Analogía topográfica:** $\Psi(x, y)$ se visualiza como la .[a]ltura.[en] un mapa. Las soluciones $\Psi(x, y) = C$ son como las çurvas de nivel"que conectan puntos de igual altura.

• **Aplicaciones Económicas:**

- **Funciones de Estado:** La exactitud garantiza la existencia de funciones potenciales que representan magnitudes económicas fundamentales como la **utilidad** ($U(x, y)$), el **costo total** ($C(q, w)$), la **producción** ($\Phi(K, L)$) o la **ganancia** ($\Pi(p, q)$) .
- **Curvas de Nivel Relevantes:** Las soluciones $\Psi(x, y) = C$ se interpretan como **curvas de indiferencia** (para utilidad), **isocostos** (para costo) o **isoquantas** (para producción), cruciales en el análisis de equilibrio .
- **Coherencia Interna de Modelos:** La condición $M_y = N_x$ actúa como un **test de consistencia** o integrabilidad de los efectos marginales observados, asegurando que provienen de una función de estado subyacente .
- **Factor Integrante como Política Económica/Deflactor:** En modelos económicos, un factor integrante puede interpretarse como un **deflactor** o un **esquema de impuestos/subsidios** que reescalaün sistema no exacto para que revele una estructura de potencial coherente, haciendo que la çontabilidad"del sistema çierre".

▪ **Secuencia Lógica para la Resolución (Cálculo del Tema)**

1. **Identificación y Verificación de Exactitud**

1.1) **Escribir la EDO en forma estándar:** $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$.

1.2) **Calcular derivadas parciales cruzadas:** $\partial M/\partial y$ y $\partial N/\partial x$.

1.3) **Comparar las derivadas:**

- Si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$: La ecuación **es exacta** . Proceder al Paso 2a.
- Si $\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$: La ecuación **no es exacta** . Proceder al Paso 2b (búsqueda de factor integrante).

2. **Para Ecuaciones Exactas: Reconstrucción de la Función Potencial $\Psi(x, y)$**

2a.1) **Elegir un camino de integración (por conveniencia):**

- **Integrar $M(x, y)$ respecto a x (tratando y como constante):**

$$\Psi(x, y) = \int M(x, y)\,dx + h(y)$$

.

- **Integrar $N(x, y)$ respecto a y (tratando x como constante):**

$$\Psi(x, y) = \int N(x, y)\,dy + g(x)$$

.

2a.2) **Determinar la función çonstante de integración"($h(y)$ o $g(x)$):**

- Si se integró M respecto a x:
  - Derivar la expresión obtenida para Ψ respecto a y: $\Psi_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\,dx\right] + h'(y)$.
  - Igualar esta expresión a $N(x, y)$ y despejar $h'(y)$.
  - Integrar $h'(y)$ respecto a y para obtener $h(y)$.
- Si se integró N respecto a y:
  - Derivar la expresión obtenida para Ψ respecto a x: $\Psi_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int N\,dy\right] + g'(x)$ [16, 24-28, 30, 80, 81, 88, 102].
  - Igualar esta expresión a $M(x, y)$ y despejar $g'(x)$.
  - Integrar $g'(x)$ respecto a x para obtener $g(x)$.

2a.3) **Formular la solución general:** Sustituir $h(y)$ (o $g(x)$) en la expresión de $\Psi(x, y)$ y escribir la solución implícita como $\Psi(x, y) = C$.

2a.4) **Aplicar condición inicial (si se proporciona):** Si se tiene $y(x_0) = y_0$, se calcula $C = \Psi(x_0, y_0)$ para obtener la solución particular .

2a.5) **Chequeo (Buena Práctica):** Una vez hallada Ψ, verificar que $\partial\Psi/\partial x = M$ y $\partial\Psi/\partial y = N$. Prestar atención al **dominio** de las funciones .

3. **Para Ecuaciones No Exactas: Búsqueda de Factor Integrante (μ)**

3b.1) **Test para factor integrante $\mu(x)$ (que depende solo de x):**

- Calcular el cociente $\phi(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$.
- Si $\phi(x)$ depende **solo de** x (es decir, no contiene y), el factor integrante es:

$$\mu(x) = \exp\left(\int \phi(x)\, dx\right)$$

.

3b.2) **Test para factor integrante $\mu(y)$ (que depende solo de y):**

- Calcular el cociente $\psi(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$.
- Si $\psi(y)$ depende **solo de** y (es decir, no contiene x), el factor integrante es:

$$\mu(y) = \exp\left(\int \psi(y)\, dy\right)$$

.

3b.3) **Si se encuentra un factor integrante $\mu(x)$ o $\mu(y)$:**

- **Multiplicar** toda la EDO original por el μ hallado: $(\mu M)\, dx + (\mu N)\, dy = 0$.
- **Verificar** que la nueva ecuación es exacta calculando $(\mu M)_y$ y $(\mu N)_x$. Deben ser iguales .
- Proceder a resolver la nueva ecuación exacta siguiendo los pasos del **Paso 2a** (Reconstrucción de Ψ) .

3b.4) **Si no se encuentra un factor integrante elemental de una variable:** La EDO no tiene un factor integrante de una sola variable; se requerirían métodos más avanzados o de inspección .

Ecuaciones Diferenciales: Fundamentos y Aplicaciones Económicas

toobaziti

Disclaimer: Este documento se ha elaborado a partir de la grabación de una clase, la presentación visual consultada y/o el material bibliográfico recomendado. Dada la naturaleza de su composición, podría contener imprecisiones u omisiones derivadas de la calidad del audio, interrupciones involuntarias o errores de redacción. Se recomienda siempre consultar la grabación o fuente original correspondiente para confirmar cualquier detalle en caso de duda.

Índice

1. Fundamentos y Clasificación de Ecuaciones Diferenciales 1

2. Problemas con Condiciones y Teoremas de Existencia y Unicidad 4

3. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes 8

4. Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas (Completas) 13

5. Estabilidad de la Solución 18

6. Aplicaciones Económicas y Síntesis 23

1. Fundamentos y Clasificación de Ecuaciones Diferenciales

Introducción

Las ecuaciones diferenciales (ED) son una herramienta matemática fundamental para modelar sistemas dinámicos, es decir, fenómenos donde la evolución de una cantidad depende de sus tasas de cambio. Permiten describir cómo se comportan los sistemas a lo largo del tiempo o el espacio, y predecir su estado futuro. Este estudio inicial se centrará en comprender qué es una ED, cómo se clasifica y qué significa encontrar su solución, sentando las bases para análisis más complejos.

Temas y Subtemas

En esta sección, se abordarán los conceptos más básicos y cruciales para entender las ecuaciones diferenciales. Se comenzará con la **definición formal de una Ecuación Diferencial (ED)** como una relación funcional entre una función incógnita y sus derivadas. Posteriormente, se explorará la **clasificación de ED**, distinguiendo entre ecuaciones ordinarias (EDO) y en derivadas parciales (EDP) según el número de variables independientes. Se definirá el **orden de una ED** por el máximo orden de derivación presente, la **linealidad** basándose en la potencia de la función incógnita y sus derivadas, y se introducirán las categorías de **ED autónomas** (donde la función F no depende directamente de la variable independiente) y la **forma normal** (cuando la derivada de mayor orden está despejada). Finalmente, se presentarán los **conceptos de solución**, explicando la diferencia entre una solución general (con constantes indeterminadas) y una solución particular (con constantes fijadas).

Definiciones

- **Ecuación Diferencial (ED):** Una relación funcional de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{t}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, , \mathbf{y}(\mathbf{k})) = \mathbf{0}$ donde $y = y(t)$ es la función incógnita. En esta expresión, t es la variable independiente, $y(t)$ es la función incógnita o variable de estado, y $y', y'', \ldots, y^{(k)}$ son sus derivadas respecto a t.
- **ED Ordinaria (EDO):** Una ED donde la función incógnita $y()$ depende de **una sola variable independiente**.
- **ED en Derivadas Parciales (EDP):** Una ED donde la función incógnita $y()$ depende de **dos o más variables independientes**.
- **Orden de una ED:** Está dado por el **máximo orden de derivación** que aparece en la ecuación. Por ejemplo, $y'' + 4y' + 5y = 0$ es de segundo orden.
- **Linealidad:** Una ED es lineal si, cuando F está expresada en forma polinómica, la función incógnita (y) y sus derivadas aparecen **elevadas a la potencia unitaria en cada uno de sus términos** y no se multiplican entre sí. Si no cumple esto, es no lineal.
- **ED Autónoma:** Una ED es autónoma si la función F **no depende directamente de la variable independiente** t. Es decir, solo depende indirectamente a través de y y sus derivadas, como en $y' = f(y)$.
- **Forma Normal:** Se dice que una ED está en forma normal cuando la derivada de mayor orden puede despejarse: $\mathbf{y^{(k)}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, , \mathbf{y}(\mathbf{k1}))$.
- **Solución General:** La solución expresada en función de **constantes indeterminadas**. El número de estas constantes es igual al orden de la ED.
- **Solución Particular:** Una única función que se obtiene al determinar los valores específicos de la(s) constante(s) de integración.
- **Constantes de Integración (C, C_1, C_2):** Constantes arbitrarias que reflejan la familia de soluciones posibles.

Analogías y Ejemplos Simples:

- $y'(t) = ry(t)$**:** Imagina una población creciendo. La velocidad a la que crece la población (y') depende directamente del tamaño actual de la población (y).
- $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$**:** La aceleración ($y''$), velocidad ($y'$) y posición ($y$) de algo están relacionadas. Podría ser un objeto que oscila y su movimiento se desacelera con el tiempo, como un péndulo con fricción.

Contexto

La clasificación de una ED es crucial porque **determina el método de resolución adecuado** y permite anticipar la naturaleza de su solución. Por ejemplo, saber si una ED es lineal permite aplicar métodos sistemáticos como la ecuación característica, mientras que identificar una ED autónoma es fundamental para el análisis cualitativo mediante diagramas de fase. La resolución de ED permite modelar fenómenos tan diversos como el **crecimiento del dinero en un banco** ($y'(t) = ry(t)$) o la dinámica de precios en **mercados con expectativas** ($Q_d = Q_s$ derivando en una ED de segundo orden para el precio). Los prerrequisitos incluyen cálculo diferencial (derivadas), cálculo integral (integración) y álgebra (resolución de ecuaciones polinómicas).

Fórmulas y Procesos

Ejemplo Básico de Resolución: Crecimiento de Dinero en un Banco

Problema: El dinero y depositado en el banco en el momento t genera intereses a una tasa continua r. **Ecuación Diferencial:** $y'(t) = ry(t)$. **Objetivo:** Determinar la cantidad de dinero $y(t)$ en cualquier momento t.
Paso a paso detallado:

1. **Reorganizar la ecuación (Separación de Variables):**
   - La ecuación es $y'(t) = ry(t)$.
   - Podemos escribir $y'(t)$ como dy/dt.
   - Entonces, $\frac{dy}{dt} = ry(t)$.
   - Para separar las variables y y t, dividimos por $y(t)$ y multiplicamos por dt: $\frac{y'(t)}{y(t)} = r$. (Esto asume $y(t) \neq 0$).
2. **Integrar ambos miembros:**
   - $\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int r dt$.
   - La integral de $\frac{y'(t)}{y(t)}$ es $\ln|y(t)|$ (por la regla de la cadena inversa).
   - La integral de r con respecto a t es $rt + C$, donde C es la constante de integración.
   - Así, obtenemos: $\ln|y(t)| = rt + C$.
3. **Despejar $y(t)$ (Exponenciación):**
   - Para eliminar el logaritmo natural, aplicamos la función exponencial $e^{()}$ a ambos lados de la ecuación: $e^{\ln|y(t)|} = e^{rt+C}$.
   - Por propiedades de los logaritmos y exponenciales ($e^{\ln x} = x$), y de los exponentes ($e^{a+b} = e^a e^b$): $|y(t)| = e^C e^{rt}$.
   - Podemos reemplazar e^C por una nueva constante, y_0, que puede ser positiva o negativa (o cero si $y(t) = 0$ siempre): $y(t) = y_0 e^{rt}$. (La constante y_0 representa el valor de $y(t)$ en $t = 0$, es decir, $y(0)$).

Aplicación práctica/Ejemplo calculado:

Si el depósito inicial es de $y_0 = 1000$ unidades monetarias y la tasa de interés continua es $r = 0{,}05$ (5 % anual):

- La solución general es $y(t) = y_0 e^{0{,}05t}$.
- Para encontrar la cantidad después de 1 año ($t = 1$): $y(1) = 1000e^{0{,}05\times 1} \approx 1000 \times 1{,}05127 \approx 1051{,}27$.
- Para encontrar la cantidad después de 5 años ($t = 5$): $y(5) = 1000e^{0{,}05\times 5} = 1000e^{0{,}25} \approx 1000 \times 1{,}28403 \approx 1284{,}03$.

Problema de consolidación:

Problema: Clasificar la Ecuación Diferencial $y^{(iv)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$ según su orden, linealidad y si es autónoma.
Solución escalonada:

1. **Identificar la variable incógnita y sus derivadas:** La función incógnita es $y(t)$, y se observan derivadas hasta el cuarto orden ($y^{(iv)}$), y''', y'', y'.
2. **Determinar el Orden:** El máximo orden de derivación es cuatro ($y^{(iv)}$). Por lo tanto, la ecuación es de **cuarto orden**.
3. **Determinar la Linealidad:**
   - Los términos $y^{(iv)}, y''', y'', y', y$ aparecen elevados a la potencia unitaria (no hay y^2, $(y')^3$, etc.).
   - No hay productos entre la función incógnita y sus derivadas (e.g., $y \cdot y'$).
   - Todos los coeficientes (1, 8, 24, 32, 16) son constantes.
   - La función F está expresada polinómicamente en términos de y y sus derivadas.
   - Por lo tanto, la ecuación es **lineal**.
4. **Determinar si es Autónoma:**
   - La forma general de una ED es $F(t, y, y, y, , y(k)) = 0$.
   - En este caso, la función F es $y^{(iv)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y$.
   - No hay una dependencia directa de la variable independiente t en la función F (no hay términos como $t \cdot y$, $\sin(t)$, e^t, etc.).
   - Por lo tanto, la ecuación es **autónoma**.

Conclusión del problema: La ED $y^{(iv)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$ es una **Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal Homogénea Autónoma de Cuarto Orden**.

Análisis e Ideas Clave

La ED es esencialmente una "ley de cambio". Nos dice cómo la pendiente de una función $y(t)$ está relacionada con t, y y sus derivadas. Imagina un mapa donde cada punto (t, y) tiene una pequeña flecha indicando la dirección del "movimiento"(la pendiente y'). Una solución es simplemente seguir esas flechas. La **clasificación** es la clave inicial; nos da pistas sobre la complejidad y el método de resolución. Por ejemplo, las ecuaciones autónomas son como sistemas con un "termostato interno"donde el cambio solo depende del estado actual, no del tiempo explícitamente.

Ideas principales:

- Las ED describen cómo una cantidad cambia basándose en sí misma y sus tasas de cambio, modelando fenómenos dinámicos.
- La **clasificación (orden, linealidad, autonomía)** es fundamental para elegir el método de resolución y entender el comportamiento del sistema.
- Las **soluciones generales** representan familias de funciones, y las **constantes de integración** permiten seleccionar una solución particular específica.
- Una ED autónoma significa que el tiempo no influye directamente en la dinámica, solo a través de la variable de estado.

Conclusiones Parciales

La comprensión de los fundamentos y la clasificación de las ecuaciones diferenciales es el punto de partida indispensable para su estudio y aplicación. Hemos establecido que una ED es una relación funcional que vincula una función incógnita con sus derivadas, y que su tipo (ordinaria o parcial), orden, linealidad y autonomía son atributos clave para caracterizarla. Esta caracterización no solo permite organizar el vasto campo de las ED, sino que también sirve como una guía heurística para seleccionar las estrategias de resolución más adecuadas. El concepto de solución general, que contiene constantes de integración, y la solución particular, que fija estas constantes mediante condiciones adicionales, son esenciales para el análisis de problemas específicos. Con esta base sólida, podemos ahora avanzar hacia el estudio de cómo estas condiciones adicionales impactan la existencia y unicidad de las soluciones, y cómo se resuelven problemas prácticos.

2. Problemas con Condiciones y Teoremas de Existencia y Unicidad

Introducción

Una vez que se entiende qué es una ecuación diferencial y cómo se clasifica, el siguiente paso crucial es comprender cómo se especifican y resuelven los problemas prácticos. La solución general de una ED contiene constantes indeterminadas, y para encontrar una solución única que describa un fenómeno específico, necesitamos información adicional. Esta información se presenta a menudo como **condiciones iniciales** o **condiciones de frontera**, que dan origen a los Problemas con Valores Iniciales (PVI) y Problemas con Valores de Frontera (PVF). Más allá de la mecánica de cálculo, es fundamental saber cuándo un PVI o PVF tiene sentido, es decir, si existe una solución y si esta es única. Para ello, el **Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad** proporciona los criterios teóricos que garantizan la validez de nuestras soluciones, ofreciendo una brújula esencial en el modelado dinámico.

Temas y Subtemas

Esta sección se centrará en los tipos de problemas que involucran ecuaciones diferenciales y la garantía de sus soluciones. Se comenzará definiendo los **Problemas con Valores Iniciales (PVI)**, que consisten en una ED acompañada de condiciones sobre la función incógnita y sus derivadas en un mismo punto. Se destacará que el propósito de estas condiciones es permitir la determinación de las constantes indeterminadas. Luego, se introducirán los **Problemas con Valores de Frontera (PVF)**, donde las condiciones se especifican en diferentes momentos del tiempo, señalando que su existencia y unicidad son más complejas que para los PVI. El núcleo de la sección será el **Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad** para PVI de primer orden, detallando las condiciones de continuidad (para existencia) y diferenciabilidad o Lipschitz (para unicidad) de la función $f(t, y)$. Se examinará la extensión de este teorema a ecuaciones de orden superior y se discutirán **casos especiales**, incluyendo un ejemplo de **no unicidad** cuando falla la diferenciabilidad y la garantía de **solución única para todas las ED lineales**.

Definiciones

- **Problema con Valores Iniciales (PVI):** Un problema que involucra una ecuación diferencial junto con **condiciones iniciales**, que se especifican para la función incógnita y/o sus derivadas en un **mismo punto** del dominio (t_0). Por ejemplo: $y'' = f(t, y, y)$, $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$.
- **Problema con Valores de Frontera (PVF):** Un problema que involucra una ecuación diferencial con **condiciones especificadas en distintos momentos del tiempo** o puntos del dominio. Por ejemplo: $y'' = f(t, y, y)$, $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$.
- **Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad (para PVI):**
  - **Existencia:** Para un PVI de primer orden $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$, si la función f es **continua** en una vecindad de (t_0, y_0), entonces existe al menos una solución continuamente diferenciable $y(t)$ en algún intervalo alrededor de t_0.
  - **Unicidad:** Si, además, la función f es **continuamente diferenciable** (o cumple una condición de Lipschitz) en esa vecindad de (t_0, y_0), entonces la solución $y(t)$ es **única**.
- **Condición de Lipschitz:** Una condición más débil que la diferenciabilidad continua, que garantiza la unicidad. La diferenciabilidad continua en un punto implica Lipschitz en ese punto, pero la recíproca no es cierta.

Analogías y Ejemplos Simples:

- **PVI:** Imagina un coche que arranca en un punto específico ($y(t_0) = y_0$) y con una velocidad inicial concreta ($y'(t_0) = y'_0$). Un PVI busca la trayectoria exacta de ese coche. Las condiciones iniciales son como el "punto de partidaz la "velocidad inicial"que **fijan una única trayectoria** de la infinidad de caminos posibles.
- **PVF:** Es como si al coche se le pidiera que, partiendo de un punto, pase por otro punto en un momento posterior. Puede que haya una forma de hacerlo, ninguna, o incluso varias (como un tiro parabólico que puede alcanzar un objetivo de dos maneras).
- **Unicidad (Intuición):** Si las "flechas"de pendiente en el mapa de una ED cambian muy suavemente, dos caminos que empiezan en el mismo punto no pueden separarse. Si las flechas cambian bruscamente, el camino puede "partirse.[en] diferentes direcciones, llevando a múltiples soluciones.

Contexto

La especificación de condiciones es fundamental para la modelización precisa de sistemas dinámicos. En economía, por ejemplo, para predecir la trayectoria del precio en un **modelo de mercado con expectativas**, es indispensable conocer el precio inicial y la tendencia inicial del precio (PVI). Si bien las condiciones iniciales son la forma más común de determinar las constantes de integración, los PVF también son relevantes en aplicaciones donde se conocen estados del sistema en diferentes puntos del tiempo o espacio. El Teorema de Existencia y Unicidad no es solo una abstracción matemática; es un **criterio operativo**. Antes de invertir tiempo en resolver una ED, es crucial verificar que se cumplen las condiciones del teorema, ya que su incumplimiento puede llevar a la inexistencia de soluciones o, lo que es más sutil, a la existencia de **múltiples soluciones**, lo cual rompería la capacidad predictiva del modelo. Este teorema garantiza la validez y el sentido de buscar *la* solución.

Fórmulas y Procesos

Ejemplo de No Unicidad en un PVI

Problema: Considerar el PVI $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$. **Objetivo:** Mostrar que este PVI tiene múltiples soluciones, a pesar de la continuidad de $f(y) = 3y^{2/3}$.
Paso a paso detallado:

1. **Verificar las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad:**
   - La función $f(t, y)$ en este caso es $f(y) = 3y^{2/3}$.

- **Continuidad:** $f(y)$ es continua para todo $y \in \mathbb{R}$ (incluyendo $y = 0$). Por lo tanto, el teorema garantiza la **existencia** de una solución para el PVI.
- **Diferenciabilidad (o Lipschitz):** Calculamos la derivada parcial de f con respecto a y:

$$f'(y) = \frac{d}{dy}(3y^{2/3}) = 3 \cdot \frac{2}{3} y^{2/3-1} = 2y^{-1/3}.$$

- Observamos que $f'(y)$ **no es continua en** $y = 0$ (tiende a infinito cuando $y \to 0$). Esto significa que la condición de diferenciabilidad continua (o Lipschitz) no se cumple en $(0, 0)$. Por lo tanto, el teorema **no nos asegura la unicidad** de la solución.

2. **Encontrar soluciones:**

- **Primera solución (la trivial):**
  - Proponemos $y(t) = 0$ para todo t.
  - $y'(t) = 0$.
  - Sustituimos en la ED: $0 = 3(0)^{2/3} \Rightarrow 0 = 0$. La ecuación se satisface.
  - Verificamos la condición inicial: $y(0) = 0$. Se satisface.
  - Por lo tanto, $\mathbf{y(t) = 0}$ es una solución del PVI.
- **Segunda solución (separación de variables):**
  - Para $y \neq 0$, podemos separar variables: $\frac{dy}{3y^{2/3}} = dt$.
  - Integramos ambos lados: $\int y^{-2/3} dy = \int 3dt$.
  - Esto nos da: $3y^{1/3} = 3t + C$.
  - Dividimos por 3 y elevamos al cubo: $y^{1/3} = t + C' \Rightarrow y(t) = (t + C')^3$ (donde $C' = C/3$).
  - Aplicamos la condición inicial $y(0) = 0$: $0 = (0 + C')^3 \Rightarrow C' = 0$.
  - Por lo tanto, $\mathbf{y(t) = t^3}$ es otra solución del PVI.

Aplicación práctica/Ejemplo calculado:

Para el PVI $y' = 3y^{2/3}, y(0) = 0$:

- Solución 1: $y(t) = 0$.
  - $y(1) = 0$.
- Solución 2: $y(t) = t^3$.
  - $y(1) = 1^3 = 1$.

  Esto demuestra claramente que para el mismo problema inicial, existen dos trayectorias diferentes, rompiendo la unicidad.

Problema de consolidación:

Problema: Dado el PVI $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$.

1. ¿El teorema de existencia y unicidad garantiza una solución única? Justifique.
2. Encuentre al menos dos soluciones diferentes para este PVI.

Solución escalonada:

1. **Análisis del Teorema de Existencia y Unicidad:**

- La función $f(t, y) = \sqrt{y}$. El punto inicial es $(t_0, y_0) = (0, 0)$.
- **Continuidad:** $f(y) = \sqrt{y}$ es continua para $y \geq 0$. En una vecindad de $(0, 0)$ donde $y \geq 0$, f es continua. Por lo tanto, la **existencia** de una solución está garantizada.
- **Diferenciabilidad (o Lipschitz):** Calculamos la derivada parcial de f con respecto a y: $f'(y) = \frac{d}{dy}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} y^{-1/2}$.

- Observamos que $f'(y)$ **no es continua en** $y = 0$ (tiende a infinito cuando $y \to 0$). Por lo tanto, la **unicidad no está garantizada** por el teorema.

2. **Encontrar soluciones:**
   - **Solución trivial:** $y(t) = 0$.
     - $y'(t) = 0$.
     - Sustituyendo en la ED: $0 = \sqrt{0} \Rightarrow 0 = 0$. Satisface la ED.
     - Condición inicial: $y(0) = 0$. Satisface la CI.
     - Así, $\mathbf{y(t) = 0}$ es una solución.
   - **Solución por separación de variables:**
     - Para $y > 0$: $\dfrac{dy}{\sqrt{y}} = dt$.
     - Integrando: $\int y^{-1/2} dy = \int dt$.
     - $2y^{1/2} = t + C$.
     - $2\sqrt{y} = t + C$.
     - Aplicando $y(0) = 0$: $2\sqrt{0} = 0 + C \Rightarrow C = 0$.
     - Entonces, $2\sqrt{y} = t \Rightarrow \sqrt{y} = t/2 \Rightarrow y(t) = (t/2)^2 = t^2/4$.
     - Verificamos esta solución: $y'(t) = 2t/4 = t/2$.
     - Sustituimos en la ED: $t/2 = \sqrt{t^2/4} = \sqrt{(t/2)^2} = |t/2|$. Para $t \geq 0$, esto es $t/2$. Satisface la ED.
     - Condición inicial: $y(0) = 0^2/4 = 0$. Satisface la CI.
     - Así, $\mathbf{y(t) = t^2/4}$ es otra solución.
   - **Observación:** Se podrían construir infinitas soluciones "pegando"la solución trivial con la solución $t^2/4$ a partir de un punto $a \geq 0$, similar al ejemplo $y' = 3y^{2/3}$.

Análisis e Ideas Clave

El teorema de Existencia y Unicidad es el **"brújula conceptual"** para cualquier problema de ED. Nos dice que la continuidad de la función $f(t, y)$ es como un requisito mínimo para que las "flechas"del campo de pendientes apunten a algún lugar, garantizando que siempre haya un camino. Pero la **unicidad** es más delicada: requiere que esas flechas no cambien "demasiado bruscoçon la variable y. Si la función f es "demasiado plana.º "puntiaguda.en el punto inicial (como en $y' = 3y^{2/3}$ donde $f'(y)$ explota en $y = 0$), pueden surgir múltiples caminos que parten del mismo punto, haciendo que el problema sea **indeterminado**. Las **ecuaciones lineales** son un çaso de oro"porque siempre cumplen la condición de diferenciabilidad continua (son suaves), garantizando así una solución única para cualquier PVI.

Ideas principales:

- Los **PVI** fijan las constantes de integración y, bajo condiciones de regularidad, garantizan una solución única.
- Los **PVF** son más complejos, pudiendo tener cero, una o infinitas soluciones.
- El **Teorema de Existencia y Unicidad** establece que la continuidad de $f(t, y)$ garantiza la existencia, y su diferenciabilidad (o Lipschitz) garantiza la unicidad para un PVI.
- La falta de unicidad ocurre cuando la función $f(t, y)$ no es suficientemente "suave.en el punto inicial, como se ve en el contraejemplo $y' = 3y^{2/3}$.
- Las **ecuaciones diferenciales lineales** son un caso privilegiado, siempre tienen solución única para PVI.

Conclusiones Parciales

La distinción entre Problemas con Valores Iniciales (PVI) y Problemas con Valores de Frontera (PVF) subraya cómo la información adicional se integra en la resolución de ecuaciones diferenciales. Mientras que los PVI, al fijar condiciones en un único instante, son inherentemente más propensos a una solución única, los PVF, al imponer restricciones en diferentes puntos, pueden manifestar una mayor complejidad en términos de existencia y multiplicidad de soluciones. El Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad actúa como un pilar teórico crucial, proveyendo los criterios de continuidad para garantizar la existencia de soluciones y las condiciones de diferenciabilidad (o Lipschitz) para asegurar su unicidad. Es importante destacar que el fracaso de la unicidad, como se observa en el ejemplo $y' = 3y^{2/3}$, no invalida la existencia de soluciones, sino que resalta los límites de la predicción en ciertos escenarios. Esta comprensión no solo enriquece nuestro enfoque analítico, sino que también nos prepara para abordar los métodos específicos de resolución para ED lineales homogéneas, donde la unicidad suele estar garantizada.

3. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes

Introducción

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes son, quizás, el punto de entrada más estructurado y sistemático en el mundo de las ED. Su forma canónica, $ay''(t)+by'(t)+cy(t) = 0$, las hace omnipresentes en la modelización de fenómenos que exhiben comportamiento oscilatorio, exponencial o amortiguado, desde circuitos RLC y osciladores mecánicos hasta la propagación de shocks en modelos económicos. La clave para resolverlas radica en un "trucoïngenioso: proponer una solución exponencial. Este método, conocido como la **ecuación característica**, transforma el problema de resolver una ecuación diferencial en un problema algebraico de encontrar las raíces de un polinomio. La naturaleza de estas raíces (reales distintas, reales iguales o complejas conjugadas) dictará la forma de la solución general, revelando patrones de crecimiento, decaimiento u oscilación que son fundamentales para interpretar la dinámica del sistema.

Temas y Subtemas

Esta sección se dedicará a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes. Se presentará la **forma general** de estas ecuaciones para segundo orden, $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$, y se explicará el **método de la ecuación característica**. Este método comienza con un "guess"propuesto de una solución exponencial ($y = Ce^{rt}$), lo que conduce a la **ecuación característica** ($ar^2 + br + c = 0$). Se analizarán en detalle los **tres casos posibles para las raíces** de esta ecuación, dependiendo del discriminante $b^2 - 4ac$:

1. **Raíces reales y distintas** ($b^2 - 4ac > 0$), con su solución general $y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$.
2. **Raíces reales e iguales** ($b^2 - 4ac = 0$), con su solución $y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2te^{r_1t}$.
3. **Raíces complejas y conjugadas** ($b^2 - 4ac < 0$), de la forma $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, y su solución $y(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t))$.

Finalmente, se discutirá la **extensión de este método a ecuaciones de orden superior a dos**, donde la ecuación característica será un polinomio de grado n.

Definiciones

- **Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:** Una ED de la forma $\mathbf{ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0}$, donde a, b, c son constantes reales y $a \neq 0$. "Homogénea"significa que el término independiente es cero.
- **Guess Propuesto:** Una solución asumida de la forma $\mathbf{y = Ce^{rt}}$ (o $y = e^{rx}$), que se utiliza para simplificar el proceso de derivación y sustitución.

- **Ecuación Característica:** Un polinomio algebraico de la forma $\mathbf{ar^2 + br + c = 0}$, obtenido al sustituir el guess propuesto en la ED homogénea. Sus raíces (r_1, r_2) determinan la estructura de la solución general.
- **Raíces Reales y Distintas ($r_1 \neq r_2$):** Ocurre cuando el discriminante $b^2 - 4ac > 0$. La solución general es $\mathbf{y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}}$.
- **Raíces Reales e Iguales ($r_1 = r_2 = r$):** Ocurre cuando el discriminante $b^2 - 4ac = 0$. La solución general es $\mathbf{y(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}}$. El término te^{rt} proporciona una segunda solución linealmente independiente.
- **Raíces Complejas y Conjugadas ($r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$):** Ocurre cuando el discriminante $b^2 - 4ac < 0$. La solución general es $\mathbf{y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))}$.
  - **Fórmula de Euler:** $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, utilizada para transformar exponenciales complejas en funciones trigonométricas reales.
  - α: controla el crecimiento o decaimiento exponencial.
  - β: controla la frecuencia de oscilación.
- **Wronskiano:** Un determinante utilizado para verificar la independencia lineal de las soluciones y asegurar que se pueden encontrar las constantes C_1, C_2 para satisfacer las condiciones iniciales.

Analogías y Ejemplos Simples:

- **El Péndulo o Resorte:** Considera un sistema masa-resorte-amortiguador. La ecuación $my'' + cy' + ky = 0$ es un ejemplo clásico.
  - **Raíces Reales Distintas (sobreamortiguado):** El resorte regresa lentamente a su posición de equilibrio sin oscilar, como un muelle en miel. Hay dos tasas diferentes de decaimiento.
  - **Raíces Reales Iguales (amortiguamiento crítico):** El resorte regresa lo más rápido posible a su equilibrio sin oscilar, como un amortiguador de puerta que se cierra justo a tiempo. El término te^{rt} significa que, aunque comparte la misma "tasa"r, la segunda solución tiene una "memoria.$^{\text{o}}$.$^{\text{em}}$puje.$^{\text{ex}}$tra.
  - **Raíces Complejas Conjugadas (subamortiguado):** El resorte oscila mientras regresa al equilibrio, como un resorte en agua. La parte real (α) controla qué tan rápido se apagan las oscilaciones, y la parte imaginaria (β) controla la frecuencia de la oscilación. Si $\alpha < 0$, las oscilaciones se amortiguan; si $\alpha > 0$, crecen.

Contexto

El método de la ecuación característica es un pilar fundamental en la ingeniería, la física y la economía para analizar sistemas lineales. Por ejemplo, en el diseño de circuitos eléctricos (circuitos RLC), la naturaleza de las raíces de la ecuación característica determina si la corriente o el voltaje oscilan y se amortiguan, crecen o simplemente decaen. En macroeconomía linealizada, permite entender cómo los shocks se propagan o se amortiguan en el tiempo. La capacidad de descomponer la dinámica en "modos exponenciales y oscilatorios.$^{\text{a}}$ partir de las raíces es invaluable para clarificar el comportamiento a largo plazo de un sistema. Este método no solo proporciona las soluciones exactas, sino que también ofrece una intuición cualitativa inmediata sobre la estabilidad y la naturaleza de la evolución de la variable.

Fórmulas y Procesos

Resolución de ED Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

Esquema de pasos tipo receta:

1. **Paso 1 (Formular la Ecuación Característica):**
   - Dada la ED: $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$.

- Proponer la solución guess: $y = Ce^{rt}$ (o simplemente e^{rt} si C se incluye después en C_1, C_2).
- Calcular las derivadas: $y' = rCe^{rt}$, $y'' = r^2Ce^{rt}$.
- Sustituir en la ED: $ar^2Ce^{rt} + brCe^{rt} + cCe^{rt} = 0$.
- Factorizar Ce^{rt} (que no es cero): $Ce^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$.
- Obtener la **Ecuación Característica**: $ar^2 + br + c = 0$.

2. **Paso 2 (Resolver las Raíces de la Ecuación Característica):**
   - Usar la fórmula cuadrática $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
   - Identificar el caso de las raíces según el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:
     - $\Delta > 0$: Dos raíces reales distintas (r_1, r_2).
     - $\Delta = 0$: Una raíz real doble $(r_1 = r_2 = r)$.
     - $\Delta < 0$: Dos raíces complejas conjugadas $(r_{1,2} = \alpha \pm i\beta)$.
3. **Paso 3 (Construir la Solución General $y_h(t)$):**
   - **Caso 1 (Raíces Reales y Distintas):** $y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$.
     - **¿Por qué?** Cada exponencial es una solución, y por la linealidad de la ED, su suma también lo es. El Wronskiano garantiza la independencia lineal.
   - **Caso 2 (Raíces Reales e Iguales):** $y(t) = C_1e^{rt} + C_2te^{rt}$.
     - **¿Por qué?** e^{rt} es una solución, pero se necesita una segunda linealmente independiente. Se demuestra que te^{rt} también es solución y es linealmente independiente. El Wronskiano es regular.
   - **Caso 3 (Raíces Complejas y Conjugadas):** $y(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t))$.
     - **¿Por qué?** Las raíces complejas dan soluciones de la forma $C_1e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2e^{(\alpha-i\beta)t}$. Usando la Fórmula de Euler ($e^{ix} = \cos x + i\sin x$), estas se transforman en una combinación lineal de senos y cosenos multiplicados por un factor exponencial real $e^{\alpha t}$. El Wronskiano es distinto de cero.
4. **Paso 4 (Aplicar Condiciones Iniciales/de Frontera para Constantes):**
   - Si se tienen condiciones iniciales (PVI), como $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = z_0$, se derivará la solución general $y(t)$ y se sustituirán las condiciones para formar un sistema lineal de ecuaciones para C_1 y C_2.
   - Resolver el sistema para obtener C_1 y C_2, y sustituirlos en $y(t)$ para la solución particular.

Ejemplo Calculado (Raíces Complejas con PVI):

Problema: $y'' + 4y' + 5y = 0$, con condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
Solución escalonada:

1. **Ecuación Característica:**
   - $r^2 + 4r + 5 = 0$.
2. **Resolver Raíces:**
   - Usando la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2i}{2} \\ &= -2 \pm i. \end{aligned}$$

- Las raíces son complejas conjugadas: $r_1 = -2 + i$, $r_2 = -2 - i$.
- Identificamos $\alpha = -2$ y $\beta = 1$ (porque $i\beta = i \cdot 1$).

3. **Construir Solución General:**
   - $y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$.
   - $y(t) = e^{-2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t))$.
4. **Aplicar Condiciones Iniciales:**
   - $y(0) = 1$**:**

$$\begin{aligned} y(0) &= e^{-2\cdot 0}(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) \\ &= 1 \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) = C_1. \end{aligned}$$

     Entonces, $C_1 = 1$.
   - $y'(0) = 0$**:** Primero, derivamos $y(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt}[e^{-2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t))] \\ &= -2e^{-2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)) + e^{-2t}(-C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)) \\ &= e^{-2t}[(-2C_1 + C_2)\cos(t) + (-2C_2 - C_1)\sin(t)]. \end{aligned}$$

     Ahora, evaluamos en $t = 0$:

$$\begin{aligned} y'(0) &= e^0[(-2C_1 + C_2)\cos(0) + (-2C_2 - C_1)\sin(0)] \\ &= 1 \cdot [(-2C_1 + C_2) \cdot 1 + (-2C_2 - C_1) \cdot 0] = -2C_1 + C_2. \end{aligned}$$

     Dado que $y'(0) = 0$: $-2C_1 + C_2 = 0$. Sustituimos $C_1 = 1$: $-2(1) + C_2 = 0 \Rightarrow -2 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 2$.
5. **Solución Particular Final:**
   - Sustituimos $C_1 = 1$ y $C_2 = 2$ en la solución general: $\mathbf{y(t) = e^{-2t}(\cos(t) + 2\sin(t))}$.

Consolidación (Extensión a Orden Superior):

Problema: Encontrar la solución general de la ED $y^{(iv)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$.
Solución escalonada:

1. **Ecuación Característica:**
   - Para una ED de orden 4, la ecuación característica es un polinomio de grado 4.
   - $r^4 + 8r^3 + 24r^2 + 32r + 16 = 0$.
2. **Resolver Raíces (por división sintética o inspección):**
   - Podemos intentar raíces enteras divisorias de 16, como -2.
   - Usando la división sintética con $r = -2$:

-2	1	8	24	32	16
		-2	-12	-24	-16
	1	6	12	8	0

     Esto significa que $(r + 2)$ es un factor, y el cociente es $r^3 + 6r^2 + 12r + 8 = 0$.
   - Reconocemos que $r^3 + 6r^2 + 12r + 8$ es la expansión de $(r + 2)^3$.
   - Para verificarlo, si $r = -2$ es raíz de este cúbico:

-2	1	6	12	8
		-2	-8	-8
	1	4	4	0

     Esto significa que $(r + 2)$ es otro factor, y el cociente es $r^2 + 4r + 4 = 0$.

- Finalmente, $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$.
- Así, la ecuación característica es $(r + 2)^4 = 0$.
- Tenemos una raíz real $r = -2$ con **multiplicidad** $m = 4$.

3. **Construir Solución General (para raíz múltiple):**
   - Cuando una raíz real r tiene multiplicidad m, la solución general incluye términos $e^{rt}, te^{rt}, t^2e^{rt}, \ldots, t^{m-1}e^{rt}$.
   - Para $r = -2$ con multiplicidad 4: $y(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} + C_3t^2e^{-2t} + C_4t^3e^{-2t}$.
   - Podemos factorizar e^{-2t}: $\mathbf{y(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4t^3)}$.

Análisis e Ideas Clave

El corazón de este método es la **.ecuación característica"**, que reduce el complejo problema de las derivadas a un sencillo problema de álgebra. El "guess.exponencial funciona porque la derivada de e^{rt} es simplemente un múltiplo de sí misma, manteniendo la forma. Las raíces de esta ecuación nos dicen mucho: si son reales, la solución será una combinación de exponenciales puras (crecimiento o decaimiento); si son complejas, aparecen **oscilaciones** (senos y cosenos), y la parte real de la raíz compleja (α) actúa como un .amortiguador.o .excitador". Si α es negativa, la oscilación se extingue; si es positiva, crece. Cuando hay **raíces repetidas**, la "segunda"solución linealmente independiente incluye un factor t (como te^{rt}), lo que introduce una dinámica diferente en la forma temporal, a menudo asociada a un comportamiento çrítico.en sistemas físicos.

Ideas principales:

- El **método de la ecuación característica** transforma una ED en un problema algebraico de búsqueda de raíces.
- La naturaleza de las **raíces (reales/complejas, distintas/iguales)** determina la forma de la solución general (exponenciales, exponenciales con factor t, u oscilaciones amortiguadas/crecientes).
- Las **raíces complejas** ($\alpha \pm i\beta$) introducen oscilaciones, donde α controla el decaimiento/crecimiento y β la frecuencia.
- La **linealidad** de la ED garantiza que la suma de soluciones individuales es también una solución, y que las soluciones son linealmente independientes.
- El **Wronskiano** es una herramienta para confirmar la independencia lineal de las soluciones y la existencia de las constantes de integración.

Conclusiones Parciales

La resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes a través del método de la ecuación característica es un enfoque potente y sistemático. Al transformar un problema de cálculo en uno de álgebra, este método simplifica enormemente el proceso de obtención de la solución general. La distinción fundamental reside en la naturaleza de las raíces del polinomio característico: raíces reales y distintas generan combinaciones de exponenciales, raíces reales e iguales incorporan un factor t para asegurar la independencia lineal, y raíces complejas conjugadas dan lugar a soluciones que combinan exponenciales con oscilaciones trigonométricas. Esta clasificación no solo facilita el cálculo, sino que también proporciona una intuición inmediata sobre la dinámica del sistema, permitiendo prever comportamientos de crecimiento, decaimiento o ciclos. La extensión de este método a órdenes superiores sigue la misma lógica, adaptando las soluciones según las multiplicidades de las raíces. Con esta capacidad de resolver la parte homogénea, el siguiente paso lógico es abordar las ecuaciones no homogéneas, donde se sumará una solución particular a esta base homogénea.

4. Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas (Completas)

Introducción

En el mundo real, los sistemas dinámicos rara vez evolucionan de forma aislada; a menudo están sujetos a fuerzas externas, entradas o estímulos que modifican su comportamiento. Es aquí donde entran en juego las **ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas**, que a diferencia de sus contrapartes homogéneas, incluyen un término forzante ($h(t)$ o $g(x) \neq 0$). La belleza de estas ecuaciones radica en un principio de solución notablemente elegante: su solución general se puede descomponer en la suma de la **solución general de la ecuación homogénea asociada ($y_h(t)$)** y **una solución particular de la ecuación completa ($y_p(t)$)**. Esta descomposición permite entender el comportamiento del sistema como una combinación de su respuesta natural"(sin estímulo) y su respuesta forzada"(debido al estímulo). Para encontrar la solución particular, el **método de los coeficientes indeterminados** ofrece una estrategia intuitiva y práctica para una amplia gama de términos forzantes.

Temas y Subtemas

Esta sección se centrará en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, también conocidas como ecuaciones çompletas". Se presentará la **forma general** de estas ecuaciones ($ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t)$), donde $h(t)$ es el término forzante. Se explicará el **principio de solución fundamental**: la solución general de la ecuación completa es la suma de la **solución general de la ecuación homogénea asociada ($y_h(t)$)** y **una solución particular de la ecuación completa ($y_p(t)$)** ($y(t) = y_h(t) + y_p(t)$). La demostración de este principio se basa en la linealidad de las ED. El método principal para encontrar $y_p(t)$ será el **Método de los Coeficientes Indeterminados**. Se detallará cómo realizar un "guess informado"para $y_p(t)$ basado en la forma de $h(t)$, incluyendo **reglas específicas para el "guess"** para polinomios, exponenciales y funciones trigonométricas (seno/coseno), así como sus sumas y productos. Se prestará especial atención a la **Regla de Multiplicidad (o Resonancia)**, que es crucial cuando el "guess"propuesto coincide con un término de la solución homogénea.

Definiciones

- **Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea (Completa):** Una ED lineal con un término forzante $h(t) \neq 0$ (o $g(x) \neq 0$), de la forma $\mathbf{a y^{(n)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = h(t)}$. El término $h(t)$ es la **entrada** o **término forzante**.
- **Solución Homogénea ($y_h(t)$):** La solución general de la ecuación homogénea asociada, es decir, cuando el término forzante es cero ($ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$). Se resuelve usando la ecuación característica.
- **Solución Particular ($y_p(t)$): Una** solución específica de la ecuación diferencial completa (no homogénea). **No contiene constantes de integración indeterminadas**.
- **Principio de Solución de ED No Homogéneas:** La solución general de una ED completa es la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada ($y_h(t)$) y una solución particular de la ecuación completa ($y_p(t)$). Es decir, $\mathbf{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$.
- **Método de los Coeficientes Indeterminados:** Una técnica para encontrar $y_p(t)$ cuando el término forzante $h(t)$ es de ciertas formas específicas (polinomios, exponenciales, senos/cosenos o sus productos/sumas). Implica hacer un "guess informado"de $y_p(t)$.
- **Guess Informado:** La forma que se propone para $y_p(t)$, que es similar a la forma del término forzante $h(t)$.
- **Regla de Multiplicidad (Resonancia):** Si un término del guess propuesto para $y_p(t)$ es ya una solución de la ecuación homogénea asociada (es decir, el término resuenaçon $y_h(t)$), entonces ese guess debe multiplicarse por $\mathbf{t^m}$ (o x^s), donde m (o s) es la multiplicidad de la raíz correspondiente en la ecuación característica.

Analogías y Ejemplos Simples:

- **Respuesta Natural vs. Respuesta Forzada:** Imagina un péndulo (y_h) que oscila libremente hasta que se detiene por fricción. Si empiezas a empujarlo periódicamente ($h(t)$), el péndulo tendrá un nuevo movimiento (y_p) que sigue el ritmo de tu empuje, además de su oscilación natural inicial. La solución total $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ es la combinación de ambos movimientos.
- **Resonancia:** Empujar un columpio a su frecuencia natural (que es un "modo"de la homogénea) provoca que la amplitud crezca mucho. Matemáticamente, esto se refleja en el factor t (o t^m) en el guess de y_p, que indica un crecimiento del efecto del forzamiento.

Contexto

Las ecuaciones no homogéneas son esenciales para modelar sistemas que interactúan con su entorno. En economía, por ejemplo, pueden describir cómo un **nivel de producción** se ve afectado por una demanda externa constante o por shocks periódicos. En física, modelan un **oscilador con una fuerza externa** periódica o un circuito eléctrico con una fuente de voltaje externa. El método de los coeficientes indeterminados es particularmente útil por su simplicidad y eficiencia cuando el término forzante ($h(t)$) tiene una forma predecible (polinomios, exponenciales, senos/cosenos). La **regla de multiplicidad** es crucial para evitar errores comunes y asegurar que la solución particular encontrada sea linealmente independiente de la homogénea, permitiendo una correcta interpretación de la respuesta forzada"del sistema.

Fórmulas y Procesos

Esquema de pasos tipo receta para el Método de los Coeficientes Indeterminados:

1. **Paso 1 (Hallar la Solución Homogénea $y_h(t)$):**
   - Resolver la ecuación homogénea asociada $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ utilizando el método de la ecuación característica.
   - Escribir $y_h(t)$ con sus constantes $C_1, C_2, \ldots$
2. **Paso 2 (Formular el Guess Informado para $y_p(t)$):**
   - **Identificar la forma de $h(t)$.**
   - **Aplicar las reglas básicas para el guess inicial:**
     - Si $h(t)$ es un **polinomio de grado** j: $h(t) = A_j t^j + \ldots + A_0$.
     - Guess: $y_p(t) = B_j t^j + \ldots + B_1 t + B_0$ (polinomio completo del mismo grado).
     - Si $h(t)$ es una **exponencial**: $h(t) = Ae^{rt}$.
     - Guess: $y_p(t) = Be^{rt}$.
     - Si $h(t)$ es **sen(rt) o cos(rt)**: $h(t) = A\sin(rt)$ o $h(t) = A\cos(rt)$.
     - Guess: $y_p(t) = B\sin(rt) + D\cos(rt)$ (ambos términos, incluso si $h(t)$ solo contiene uno).
     - Si $h(t)$ es una **suma de funciones**: la suma de los guesses individuales, eliminando términos redundantes.
     - Si $h(t)$ es un **producto de funciones**: el producto de los guesses individuales, eliminando términos redundantes.
3. **Paso 3 (Aplicar la Regla de Multiplicidad/Resonancia):**
   - **Verificar si el guess inicial para $y_p(t)$ contiene algún término que ya es solución de $y_h(t)$.**
   - Si hay resonancia: Multiplicar el guess por t^m (o x^s), donde m (o s) es la **multiplicidad de la raíz** de la ecuación característica que corresponde a ese término resonante.
     - Ejemplo: Si $h(t) = e^{2t}$ y e^{2t} es parte de $y_h(t)$ porque $r = 2$ es una raíz simple (multiplicidad 1), entonces $y_p(t)$ pasa de Ae^{2t} a Ate^{2t}.
     - Ejemplo: Si $h(t) = e^t$ y $y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^t$ (raíz $r = 1$ con multiplicidad 2), entonces $y_p(t)$ pasa de Ae^t a At^2e^t.

4. **Paso 4 (Calcular Derivadas de $y_p(t)$ y Sustituir):**
   - Derivar $y_p(t)$ tantas veces como el orden de la ED.
   - Sustituir $y_p(t)$ y sus derivadas en la **ED completa original** ($ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t)$).
5. **Paso 5 (Determinar los Coeficientes Indeterminados):**
   - Agrupar los términos resultantes por potencias de t, exponenciales, senos/cosenos.
   - Igualar los coeficientes de estos términos con los coeficientes correspondientes de $h(t)$ en el lado derecho de la ED.
   - Resolver el sistema de ecuaciones lineales para encontrar los valores de los coeficientes indeterminados ($A, B, \ldots$).
6. **Paso 6 (Escribir la Solución General Completa):**
   - Sumar la solución homogénea $y_h(t)$ y la solución particular $y_p(t)$ con los coeficientes encontrados: $\mathbf{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$.

Ejemplo Calculado (Exponencial con Multiplicidad):

Problema: $y''' - 4y' = 3e^{2t}$.
Solución escalonada:

1. **Hallar $y_h(t)$:**
   - Ecuación homogénea: $y''' - 4y' = 0$.
   - Ecuación característica: $r^3 - 4r = 0$.
   - Factorizar $r(r^2 - 4) = 0 \Rightarrow r(r-2)(r+2) = 0$.
   - Raíces: $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, $r_3 = -2$ (reales y distintas).
   - Solución homogénea: $y_h(t) = C_1e^{0t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t} = C_1 + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}$.
2. **Formular Guess para $y_p(t)$:**
   - El término forzante es $h(t) = 3e^{2t}$. El guess inicial sería Ae^{2t}.
   - **Verificar resonancia:** El término e^{2t} **es una solución de la homogénea** (C_2e^{2t}). La raíz $r = 2$ tiene multiplicidad 1.
   - Aplicar regla de multiplicidad: Multiplicar el guess por t^1.
   - Guess modificado: $y_p(t) = Ate^{2t}$.
3. **Calcular Derivadas de $y_p(t)$:**
   - $y_p(t) = Ate^{2t}$.
   - $y_p'(t) = A(1 \cdot e^{2t} + t \cdot 2e^{2t}) = Ae^{2t}(1 + 2t)$.
   - $y_p''(t) = A(2e^{2t}(1 + 2t) + e^{2t} \cdot 2) = Ae^{2t}(2 + 4t + 2) = Ae^{2t}(4t + 4)$.
   - $y_p'''(t) = A(2e^{2t}(4t + 4) + e^{2t} \cdot 4) = Ae^{2t}(8t + 8 + 4) = Ae^{2t}(8t + 12)$.
4. **Sustituir en la ED Completa:**
   - $y''' - 4y' = 3e^{2t}$.
   - $Ae^{2t}(8t + 12) - 4[Ae^{2t}(1 + 2t)] = 3e^{2t}$.
   - $Ae^{2t}(8t + 12 - 4 - 8t) = 3e^{2t}$.
   - $Ae^{2t}(8) = 3e^{2t}$.
   - $8Ae^{2t} = 3e^{2t}$.
5. **Determinar Coeficientes:**
   - Igualando los coeficientes de e^{2t}: $8A = 3 \Rightarrow A = \dfrac{3}{8}$.
6. **Solución General Completa:**
   - $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t} + \dfrac{3}{8}te^{2t}$.

Problema de consolidación:

Problema: Encontrar la solución general de la ecuación diferencial del modelo de mercado $2p'' - 2p' + 5p = 10$, y si las condiciones iniciales son $p(0) = 4, p'(0) = 4$, encontrar la solución particular. Analizar la estabilidad asintótica e interpretar económicamente.
Solución escalonada:

1. **Formulación de la ED:** (Ya dada: $2p'' - 2p' + 5p = 10$).
2. **Solución General:**
   - **Homogénea ($p_h(t)$):** $2p'' - 2p' + 5p = 0$.
     - Ecuación característica: $2r^2 - 2r + 5 = 0$.
     - Raíces:
$$\begin{aligned} r &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(5)}}{2(2)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{4} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{4} \\ &= \frac{2 \pm 6i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$
     - Son raíces complejas, con $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{3}{2}$.
     - $p_h(t) = e^{t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)$.
   - **Particular ($p_p(t)$):** Para $h(t) = 10$ (una constante).
     - Guess inicial: $p_p(t) = A$.
     - Verificar resonancia: A (constante) no es solución de la homogénea (la raíz $r = 0$ no está en el polinomio característico). Por lo tanto, no hay resonancia.
     - Derivadas: $p_p'(t) = 0$, $p_p''(t) = 0$.
     - Sustituir en la ED: $2(0) - 2(0) + 5A = 10 \Rightarrow 5A = 10 \Rightarrow A = 2$.
     - $p_p(t) = 2$.
   - **Solución General Completa:** $\mathbf{p(t) = e^{t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right) + 2}$.
3. **Solución Particular (con $p(0) = 4, p'(0) = 4$):**
   - **Aplicar $p(0) = 4$:**
$$\begin{aligned} p(0) &= e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) + 2 \\ &= 1 \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) + 2 = C_1 + 2. \end{aligned}$$
     $C_1 + 2 = 4 \Rightarrow C_1 = 2$.
   - **Derivar $p(t)$:**
$$\begin{aligned} p'(t) = &\frac{1}{2}e^{t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right) \\ &+ e^{t/2}\left(-\frac{3}{2}C_1 \sin\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{2}C_2 \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right) + 0. \end{aligned}$$
   - **Aplicar $p'(0) = 4$:**
$$\begin{aligned} p'(0) = &\frac{1}{2}e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) \\ &+ e^0\left(-\frac{3}{2}C_1 \sin(0) + \frac{3}{2}C_2 \cos(0)\right) \\ = &\frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2. \end{aligned}$$
     $\frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 = 4$. Sustituir $C_1 = 2$: $\frac{1}{2}(2) + \frac{3}{2}C_2 = 4 \Rightarrow 1 + \frac{3}{2}C_2 = 4 \Rightarrow \frac{3}{2}C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 2$.

- **Solución Particular Final:** $\mathbf{p(t) = e^{t/2}\left(2\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + 2\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right) + 2}$.

4. **Análisis de Estabilidad Asintótica e Implicación Económica:**
   - **Estabilidad Asintótica:** Depende de que la solución homogénea $p_h(t)$ tienda a cero cuando $t \to \infty$. El teorema de estabilidad establece que esto ocurre **sii todas las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa**.
   - Las raíces de la ecuación característica son $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$. La **parte real ($\alpha$) es** $\frac{1}{2}$.
   - Dado que $\alpha = \frac{1}{2} > 0$, el término exponencial $e^{t/2}$ en $p_h(t)$ **tiende a infinito** cuando $t \to \infty$.
   - Por lo tanto, la solución general **no es asintóticamente estable**.
   - **Implicación Económica:** La inestabilidad significa que la trayectoria a largo plazo del precio **sí dependerá de las condiciones iniciales** (C_1, C_2) y no convergerá a la solución particular $p_p(t) = 2$. El precio **tenderá a infinito** a medida que el tiempo avanza, con **oscilaciones crecientes** (debido a la parte real positiva de las raíces complejas). Esto sugiere un comportamiento **explosivo e insostenible** del precio en el mercado según este modelo con expectativas de los agentes.

Análisis e Ideas Clave

La magia de las ecuaciones no homogéneas radica en su **descomposición** $y_h + y_p$. La parte homogénea (y_h) representa la "memoria"del sistema, cómo evolucionaría por sí solo, mientras que la parte particular (y_p) captura la respuesta forzada.ªl estímulo externo. El **Método de Coeficientes Indeterminados** es como hacer una .ªdivinanza inteligente"sobre la forma de y_p: si la entrada $(h(t))$ es un polinomio, y_p será un polinomio; si es una exponencial, y_p será una exponencial, y así sucesivamente. La **regla de resonancia"** es crucial: si el sistema es .emˆpujado"de una manera que coincide con una de sus "frecuencias naturales"(un modo de y_h), la respuesta forzada se amplifica, lo que se modela multiplicando el guess por un factor t (o t^m). Esto asegura la independencia lineal de las soluciones y evita duplicar términos.

Ideas principales:

- La solución general de una ED no homogénea se divide en la **solución homogénea (y_h) y una particular (y_p)**.
- El **método de coeficientes indeterminados** busca y_p proponiendo un "guess"similar a la forma del término forzante $h(t)$.
- La **regla de multiplicidad (resonancia)** es esencial: si el guess de y_p coincide con un término de y_h, se multiplica por t^m para asegurar la independencia lineal y modelar la amplificación.
- Este método es aplicable para términos forzantes de tipo polinómico, exponencial y trigonométrico, y sus combinaciones.
- Los coeficientes indeterminados se encuentran sustituyendo el guess de y_p en la ED completa y comparando coeficientes.

Conclusiones Parciales

La resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas (completas) marca un avance significativo, ya que permite modelar sistemas dinámicos bajo la influencia de fuerzas externas. El principio de que la solución general es la suma de la solución homogénea y una solución particular $(y(t) = y_h(t) + y_p(t))$ es fundamental y conceptualmente poderoso, al separar la respuesta natural del sistema de su respuesta forzada. El Método de los Coeficientes Indeterminados se presenta como una estrategia práctica y eficiente para encontrar $y_p(t)$ para una amplia gama de términos forzantes. La **Regla de Multiplicidad (Resonancia)** es una consideración crítica, ya que previene la redundancia de soluciones y modela adecuadamente los efectos de la amplificación cuando un forzamiento coincide con la dinámica natural del sistema. Dominar este método no solo completa el conjunto de herramientas para resolver ED lineales, sino que también sienta las bases para el análisis de estabilidad, permitiendo determinar el comportamiento a largo plazo de estos sistemas forzados.

5. Estabilidad de la Solución

Introducción

En el estudio de sistemas dinámicos, resolver una ecuación diferencial es solo una parte de la historia; la otra, y a menudo más crucial, es entender **qué ocurrirá a largo plazo con la solución**. La **estabilidad** de las soluciones responde a preguntas fundamentales como: ¿un sistema volverá a un equilibrio después de una perturbación? ¿O se alejará sin control, .exˆplotando¿. Este concepto es vital en cualquier área de modelización, desde la economía (mecanismos de ajuste de precios, deuda) y la ingeniería (seguridad de controles) hasta la biología (dinámica poblacional). La **estabilidad asintótica** es particularmente deseable, ya que implica que la influencia de las condiciones iniciales se desvanece con el tiempo, y la solución converge a un estado de equilibrio o a una trayectoria forzada estable. El **Teorema de Estabilidad**, que relaciona la estabilidad con la parte real de las raíces de la ecuación característica, proporciona una poderosa herramienta analítica para determinar esta propiedad sin necesidad de calcular la solución explícita para tiempos muy grandes.

Temas y Subtemas

Esta sección profundiza en el concepto de **estabilidad** de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Se comenzará con la **definición de estabilidad asintótica**, que implica que la solución general de la ecuación homogénea asociada ($y_h(t)$) tiende a cero cuando $t \to \infty$. Se destacará la implicación económica de que la trayectoria a largo plazo no dependa de las condiciones iniciales. El **Teorema de Estabilidad** será el eje central, estableciendo que la solución general es estable **sii todas las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa**. Posteriormente, se realizará un **análisis detallado por tipo de raíces**:

1. **Raíces reales y distintas**: la estabilidad depende de que la raíz real de mayor valor sea negativa.
2. **Raíces reales e iguales (múltiples)**: la estabilidad se da si la raíz r es negativa.
3. **Raíces complejas y conjugadas** ($\alpha \pm i\beta$): la estabilidad depende de que la parte real α sea negativa.
4. **Raíces complejas iguales (múltiples)**: la estabilidad también requiere que la parte real α sea negativa.

Finalmente, se introducirá el **Diagrama de Fase para ED de primer orden autónomas ($y' = f(y)$)** como una herramienta cualitativa para analizar la estabilidad de los equilibrios, interpretando el sentido del movimiento y la estabilidad de los puntos donde $y' = 0$ a partir de la pendiente de $f(y)$.

Definiciones

- **Estabilidad (de Lyapunov):** Un equilibrio es estable si, al iniciar suficientemente cerca, la trayectoria permanece cerca para todo tiempo futuro.
- **Estabilidad Asintótica:** Un equilibrio es asintóticamente estable si, además de ser estable, las trayectorias cercanas **convergen** al equilibrio cuando $t \to \infty$. Para una ED completa ($y(t) = y_h(t) + y_p(t)$), esto significa que $y_h(t)$ **tiende a cero cuando** $t \to \infty$.
- **Inestable:** Un equilibrio es inestable si las trayectorias cercanas se alejan de él.
- **Semiestable:** Un equilibrio atrae desde un lado y repele desde el otro.
- **Teorema de Estabilidad (Criterio Espectral para Continuo):** La solución general de una ED lineal es **estable si y solo si todas las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa** ($\Re(\lambda) < 0$).
- **Diagrama de Fase (para ED de Primer Orden Autónomas $y' = f(y)$):** Una herramienta gráfica para analizar cualitativamente la solución, que consiste en el gráfico de $f(y)$ en el plano (y, y').
- **Equilibrios (en Diagrama de Fase):** Puntos donde $y' = f(y) = 0$.

- **Criterio de Estabilidad Cualitativo (para Diagrama de Fase):**
  - **Estable:** Si la pendiente de la línea de fase ($f'(y^*)$) en un equilibrio y^* es **negativa** (las flechas apuntan hacia el equilibrio).
  - **Inestable:** Si la pendiente $f'(y^*)$ es **positiva** (las flechas se alejan del equilibrio).
  - **Semiestable o Indeciso:** Si la pendiente es cero; se requiere un análisis más detallado del signo de $f(y)$ en el entorno.

Analogías y Ejemplos Simples:

- **Canica en un Paisaje:**
  - **Cuenco (con fricción):** Si una canica se suelta cerca, vuelve al fondo. Esto es **asintóticamente estable** ($\Re(\lambda) < 0$).
  - **Cima de una colina:** Cualquier empujón la aleja. Esto es **inestable** ($\Re(\lambda) > 0$).
  - **Meseta horizontal (sin fricción):** La canica se queda donde se puso o en órbita, pero no vuelve al centro. Esto es **estable pero no asintóticamente estable** ($\Re(\lambda) = 0$, sin bloques de Jordan).
- **Flechas en el Diagrama de Fase:** Las flechas indican el sentido del movimiento de y. Si las flechas .$^{\text{en}}$tran.$^{\text{a}}$l equilibrio desde ambos lados, es estable. Si "salen", es inestable.

Contexto

El análisis de estabilidad es crucial en economía para entender si un mercado, después de una perturbación, **vuelve al precio de equilibrio** o si, por el contrario, se desestabiliza. Permite a los diseñadores de políticas evaluar si es suficiente "dejar que el sistema actúe.º si es necesaria una intervención. La estabilidad asintótica es particularmente importante porque asegura que la trayectoria a largo plazo del sistema **no dependa de las condiciones iniciales**, convergiendo a una solución predecible (la solución particular $y_p(t)$). El **Diagrama de Fase**, aunque limitado a ED autónomas de primer orden, es una herramienta cualitativa muy potente que permite visualizar la dinámica y la estabilidad de los equilibrios de forma intuitiva sin resolver la ecuación explícitamente. Este criterio de estabilidad cualitativo coincide con el cuantitativo de raíces negativas para ED lineales de primer orden.

Fórmulas y Procesos

Análisis Detallado de Estabilidad por Tipo de Raíces:

El **Teorema de Estabilidad** establece que la solución es asintóticamente estable si todas las raíces de la ecuación característica tienen **parte real negativa**. A continuación, se detalla cómo esto se aplica a cada tipo de raíz de $p(\lambda) = 0$:

1. **Raíces Reales y Distintas ($r_1, r_2, \ldots, r_n$):**
   - Solución homogénea: $y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_n e^{r_n t}$.
   - **Condición de Estabilidad:** Es asintóticamente estable **sii todas las raíces r_i son negativas** ($r_i < 0$ para todo i).
     - Si la raíz real de mayor valor (la "dominante") es positiva ($r_1 > 0$) o cero ($r_1 = 0$), el término $e^{r_1 t}$ crecerá indefinidamente o permanecerá constante, respectivamente, haciendo la solución inestable.
     - **Ejemplo:** Si $y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$, ambas raíces son negativas, así que $y_h(t) \to 0$ y es estable.
2. **Raíces Reales e Iguales (Múltiples, r con multiplicidad m):**
   - Términos en la solución homogénea: $C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} + \ldots + C_m t^{m-1} e^{rt}$.
   - **Condición de Estabilidad:** Es asintóticamente estable **sii la raíz r es negativa** ($r < 0$).
     - Aunque haya factores t^k, si $r < 0$, el crecimiento exponencial e^{rt} domina la potencia polinómica, haciendo que $t^k e^{rt} \to 0$ cuando $t \to \infty$.

- **Ejemplo:** Si $y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$, la raíz es $-1 < 0$, por lo que $y_h(t) \to 0$ y es estable.

3. **Raíces Complejas y Conjugadas ($\alpha \pm i\beta$):**
   - Términos en la solución homogénea: $e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$.
   - **Condición de Estabilidad:** Es asintóticamente estable **sii la parte real α es negativa** ($\alpha < 0$).
     - Las funciones $\cos(\beta t)$ y $\sin(\beta t)$ son acotadas (oscilan entre -1 y 1). Por lo tanto, el comportamiento a largo plazo depende del término exponencial $e^{\alpha t}$.
     - Si $\alpha > 0$, $e^{\alpha t}$ crece indefinidamente, causando oscilaciones con amplitud creciente (inestable).
     - Si $\alpha = 0$, $e^{\alpha t} = 1$, resultando en oscilaciones persistentes que no decaen (estable, pero no asintóticamente estable, ya que no converge a cero).
     - **Ejemplo:** Si $y_h(t) = e^{-0,5t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t))$, la parte real es $-0,5 < 0$, por lo que $y_h(t) \to 0$ y es estable (oscilaciones amortiguadas).

4. **Raíces Complejas Iguales (Múltiples, $\alpha \pm i\beta$ con multiplicidad m):**
   - Términos en la solución homogénea: $e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{m-1} t^k (C_{2k-1} \cos(\beta t) + C_{2k} \sin(\beta t))$.
   - **Condición de Estabilidad:** Es asintóticamente estable **sii la parte real α es negativa** ($\alpha < 0$).
     - Al igual que con las raíces reales múltiples, el término t^k no impide la convergencia a cero si el factor exponencial $e^{\alpha t}$ decae.

Ejemplo de Aplicación del Diagrama de Fase (para ED de Primer Orden Autónoma):

Problema: $y' = y^3 - 7y^2 + 15y - 9$. **Objetivo:** Analizar cualitativamente la estabilidad de los equilibrios usando el diagrama de fase.
Solución escalonada:

1. **Hallar los Equilibrios:**
   - Los equilibrios son los puntos donde $y' = 0$.
   - $y^3 - 7y^2 + 15y - 9 = 0$.
   - Probando raíces enteras (divisores de -9): $y = 1$ es una raíz ($1 - 7 + 15 - 9 = 0$).
   - Realizando división sintética para $(y - 1)$:

1	1	-7	15	-9
		1	-6	9
	1	-6	9	0

     El cociente es $y^2 - 6y + 9 = (y - 3)^2 = 0$.
   - Las raíces son $y = 1$ (simple) y $y = 3$ (doble).
   - Equilibrios: $y_1^* = 1$, $y_2^* = 3$.

2. **Construir el Diagrama de Fase (Sentido del Movimiento):**
   - Se grafica $f(y) = y^3 - 7y^2 + 15y - 9$ en el plano (y, y').
   - Se eligen puntos de prueba en los intervalos definidos por los equilibrios: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, \infty)$.
     - Para $y < 1$ (ej. $y = 0$): $f(0) = -9 < 0$. y' disminuye (flecha $\leftarrow$).
     - Para $1 < y < 3$ (ej. $y = 2$): $f(2) = 2^3 - 7(2^2) + 15(2) - 9 = 8 - 28 + 30 - 9 = 1 > 0$. y' aumenta (flecha $\rightarrow$).
     - Para $y > 3$ (ej. $y = 4$): $f(4) = 4^3 - 7(4^2) + 15(4) - 9 = 64 - 112 + 60 - 9 = 3 > 0$. y' aumenta (flecha $\rightarrow$).

3. **Clasificar la Estabilidad de los Equilibrios:**

- **Equilibrio $y_1^* = 1$:**
  - A la izquierda de 1 ($y < 1$), las flechas van hacia la izquierda ($\leftarrow$).
  - A la derecha de 1 ($1 < y < 3$), las flechas van hacia la derecha ($\rightarrow$).
  - Como las flechas se alejan de $y = 1$ en ambas direcciones (o, más precisamente, desde la izquierda entran y desde la derecha salen si se considera un entorno), $y = 1$ es **inestable**.
- **Equilibrio $y_2^* = 3$:**
  - A la izquierda de 3 ($1 < y < 3$), las flechas van hacia la derecha ($\rightarrow$).
  - A la derecha de 3 ($y > 3$), las flechas van hacia la derecha ($\rightarrow$).
  - Como las flechas van hacia la derecha en ambos lados, significa que desde la izquierda entran, y desde la derecha también (si la trayectoria de $f(y)$ sigue subiendo), este punto atrae desde la izquierda, pero repele desde la derecha. En el contexto de los materiales, $y = 3$ es **inestable**. Generalmente, si la derivada $f'(y^*) = 0$ (que es el caso para una raíz doble), el criterio es indeciso y se analiza el signo de $f(y)$ en el entorno; aquí, $y = 3$ es semiestable desde una perspectiva más precisa, pero el material lo clasifica como inestable en este ejemplo por el comportamiento local.

Problema de Consolidación:

Problema: Una población $P(t)$ sigue una dinámica $\dot{P} = P(1 - P)(P - 2)$.

1. Encuentre los puntos de equilibrio.
2. Construya el diagrama de fase.
3. Clasifique la estabilidad de cada equilibrio.
4. Interprete económicamente este modelo de población.

Solución escalonada:

1. **Puntos de Equilibrio:**
   - Se encuentran cuando $\dot{P} = f(P) = 0$.
   - $P(1 - P)(P - 2) = 0$.
   - Los equilibrios son $P_1^* = 0$, $P_2^* = 1$, $P_3^* = 2$.
2. **Diagrama de Fase (Sentido del Movimiento):**
   - Intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$.
   - $f(P) = P(1 - P)(P - 2)$.
   - Para $P < 0$ (ej. $P = -1$): $f(-1) = (-1)(1 - (-1))(-1 - 2) = (-1)(2)(-3) = 6 > 0$. Flecha $\rightarrow$.
   - Para $0 < P < 1$ (ej. $P = 0{,}5$): $f(0{,}5) = (0{,}5)(1-0{,}5)(0{,}5-2) = (0{,}5)(0{,}5)(-1{,}5) = -0{,}375 < 0$. Flecha $\leftarrow$.
   - Para $1 < P < 2$ (ej. $P = 1{,}5$): $f(1{,}5) = (1{,}5)(1-1{,}5)(1{,}5-2) = (1{,}5)(-0{,}5)(-0{,}5) = 0{,}375 > 0$. Flecha $\rightarrow$.
   - Para $P > 2$ (ej. $P = 3$): $f(3) = (3)(1 - 3)(3 - 2) = (3)(-2)(1) = -6 < 0$. Flecha $\leftarrow$.
3. **Clasificación de Estabilidad:**
   - $P_1^* = 0$**:** Flechas $\rightarrow$ (izquierda) y $\leftarrow$ (derecha). Las flechas entran hacia 0. Por lo tanto, $\mathbf{P = 0}$ es **estable**.
   - $P_2^* = 1$**:** Flechas $\leftarrow$ (izquierda) y $\rightarrow$ (derecha). Las flechas se alejan de 1. Por lo tanto, $\mathbf{P = 1}$ es **inestable**.
   - $P_3^* = 2$**:** Flechas $\rightarrow$ (izquierda) y $\leftarrow$ (derecha). Las flechas entran hacia 2. Por lo tanto, $\mathbf{P = 2}$ es **estable**.
4. **Interpretación Económica/Poblacional:**

- Este modelo describe una población con tres estados de equilibrio.
- $\mathbf{P = 0}$ (extinción) es un equilibrio **estable**. Si la población es muy pequeña o negativa (no biológicamente realista, pero matemáticamente), tiende a extinguirse.
- $\mathbf{P = 1}$ es un umbral **inestable**. Si la población cae ligeramente por debajo de 1, se dirige a la extinción (0). Si supera ligeramente 1, tiende a crecer hasta 2. Representa un punto de no retorno.
- $\mathbf{P = 2}$ es un equilibrio **estable** (capacidad de carga). Si la población está entre 1 y 2, crece hacia 2. Si está por encima de 2, decae hacia 2. Este es el nivel de población sostenible a largo plazo, asumiendo un tamaño mínimo de 1 para evitar la extinción.

Análisis e Ideas Clave

El concepto de estabilidad nos dice si un sistema tiene la "fuerza"para volver a un punto de equilibrio tras una pequeña perturbación. En el mundo matemático, esto se traduce en si los términos exponenciales de la solución homogénea se apagan o .explotan". La clave universal es la **parte real de las raíces de la ecuación característica**: si es negativa, el modo correspondiente decae; si es positiva, crece; si es cero, persiste. Para las raíces complejas ($\alpha \pm i\beta$), la parte real α es como el .amortiguador.o .excitador"de las oscilaciones. El **Diagrama de Fase** es un "mapa de carreteras"simplificado para las ED autónomas de primer orden: las "flechas"nos dicen hacia dónde se mueve la variable, y la forma en que estas flechas se encuentran (o no) en los "puntos de descanso"(equilibrios) revela su estabilidad. Una pendiente negativa en el punto de equilibrio en el diagrama de fase significa que las flechas .empujan"hacia él, haciéndolo estable.

Ideas principales:

- La **estabilidad asintótica** significa que la solución homogénea se anula con el tiempo, haciendo que la trayectoria a largo plazo converja a la solución particular y no dependa de las condiciones iniciales.
- El **Teorema de Estabilidad** establece que un sistema lineal es asintóticamente estable **sii todas las raíces de su ecuación característica tienen parte real negativa**.
- La **parte real** de las raíces (reales o complejas) es el factor dominante para determinar el crecimiento o decaimiento de los términos exponenciales.
- El **Diagrama de Fase** permite analizar cualitativamente la estabilidad de los equilibrios en ED autónomas de primer orden, a través del signo de y' y la pendiente de $f(y)$ en los equilibrios.
- Un equilibrio es estable si las trayectorias convergen hacia él; inestable si se alejan.

Conclusiones Parciales

El estudio de la estabilidad es un componente esencial y predictivo en el análisis de ecuaciones diferenciales, ya que nos permite comprender el comportamiento a largo plazo de los sistemas dinámicos. La estabilidad asintótica, en particular, es deseable porque garantiza que las influencias iniciales se disipen con el tiempo, llevando el sistema hacia una trayectoria predecible definida por la solución particular. El **Teorema de Estabilidad**, que vincula la parte real negativa de todas las raíces de la ecuación característica con la estabilidad asintótica, ofrece un criterio cuantitativo riguroso y aplicable a ED lineales de cualquier orden. Paralelamente, el **Diagrama de Fase** proporciona una poderosa herramienta cualitativa para ED autónomas de primer orden, permitiendo visualizar la estabilidad de los equilibrios y el sentido del movimiento de la variable de estado. Estas herramientas, tanto analíticas como gráficas, son fundamentales para la interpretación y el diseño de modelos en diversas disciplinas, especialmente en la economía, donde la estabilidad de los equilibrios es un indicador crítico de la salud de los mercados.

6. Aplicaciones Económicas y Síntesis

Introducción

Las ecuaciones diferenciales no son meras abstracciones matemáticas; son el lenguaje con el que se describen y analizan innumerables fenómenos del mundo real, y la economía es un campo particularmente fértil para su aplicación. Más allá de los ejemplos fundamentales como el crecimiento del dinero, las ED permiten modelar dinámicas complejas comprender si un sistema económico converge a un equilibrio o si, por el contrario, exhibe comportamientos explosivos e insostenibles.

Temas y Subtemas

En esta sección, se consolidará el conocimiento adquirido a través de una **aplicación económica** relevante: el **modelo de mercado con expectativas de precios**. Se contextualizará cómo los agentes económicos pueden ajustar su conducta no solo por el precio actual (p), sino también por su tendencia (p') y aceleración (p''). Se presentará la **formulación general del modelo** mediante un sistema de ecuaciones de oferta (Q_s) y demanda (Q_d) que incluyen estas derivadas. Se demostrará cómo la igualación de oferta y demanda ($Q_s = Q_d$) conduce a una **ecuación diferencial lineal de segundo orden** para el precio, que puede ser resuelta con los métodos estudiados. El Ejemplo 9 de los materiales, que deriva la ED $2p'' - 2p' + 5p = 10$, y su solución particular, servirán como ilustración. Finalmente, se utilizará un **problema de consolidación** integral (teoría + cálculo + interpretación) basado en este modelo, ya resuelto en la Sección IV, para recalcar la importancia del análisis de estabilidad en la interpretación económica de los resultados.

Definiciones

- **Modelo de Mercado con Expectativas de Precios:** Un modelo económico donde las cantidades demandadas (Q_d) y ofertadas (Q_s) de un bien no solo dependen del precio actual (p), sino también de su **tendencia (p')** (la primera derivada del precio respecto al tiempo) y **aceleración (p'')** (la segunda derivada).
- **Formulación General del Modelo:**
  - $Q_d = a + bp + cp' + dp''$.
  - $Q_s = e + fp + gp' + hp''$.
  - Condición de equilibrio: $Q_d = Q_s$.
  - Al igualar, se obtiene una ecuación diferencial lineal de segundo orden para $p(t)$.
- **Expectativas Naïve (Ingenuas):** Una hipótesis simplificadora donde los agentes suponen que el precio futuro será el actual, es decir, $p^e = p$. Esto convierte la dinámica en autónoma de primer orden.
- **Velocidad de Ajuste (k):** En modelos de ajuste por exceso de demanda ($\dot{p} = k[D(p) - S(p)]$), $k > 0$ mide la rapidez con la que el precio reacciona al desequilibrio.

Analogías y Ejemplos Simples:

- **Comportamiento de Compradores/Vendedores:**
  - Si los compradores esperan que los precios suban ($p' > 0$, inflación), pueden demandar más ahora para çubrirse".
  - Si los vendedores esperan un aumento, pueden ofertar menos ahora para guardar stock y vender más caro después.
- **Coche en Autopista:**
  - El precio (p) es tu posición.
  - La tendencia (p') es tu velocidad.
  - La aceleración (p'') es cómo cambia tu velocidad.
  - Los agentes del mercado reaccionan no solo a dónde estás (precio actual), sino a qué tan rápido te mueves y si estás acelerando o frenando.

Contexto

El modelado de mercados con expectativas es una aplicación económica avanzada de las ED que muestra cómo las herramientas matemáticas pueden capturar complejidades del comportamiento humano. Las derivadas de precios reflejan la **tendencia** y **aceleración**, que son proxies de las expectativas de los agentes. La resolución de la ED resultante permite encontrar la **trayectoria dinámica del precio**. Sin embargo, más allá de la solución explícita, el **análisis de estabilidad** es el verdadero test de validez económica. Si el modelo predice una solución inestable (por ejemplo, precios que tienden a infinito con oscilaciones crecientes, como en el Ejemplo 9), esto sugiere que los supuestos del modelo o el comportamiento de los agentes llevan a un escenario de mercado .explosivo.º ïnsostenible", que raramente se observa en la realidad sin intervención. Por el contrario, un mercado con un equilibrio estable es uno que puede absorber shocks y retornar a su estado de equilibrio.

Fórmulas y Procesos

Problema de Consolidación: Modelo de Mercado con Expectativas de Precios

Este problema ya fue resuelto paso a paso en la Sección IV. Se reproduce aquí con su interpretación final para consolidar el conocimiento. **Problema:** Dado el modelo de mercado con expectativas de precios:

$$\begin{aligned} Q_d &= 9 - p + p' + 3p'' \\ Q_s &= -1 + 4p - p' + 5p'' \\ Q_s &= Q_d \end{aligned}$$

y condiciones iniciales $p(0) = 4, p'(0) = 4$.

1. Formula la ecuación diferencial resultante.
2. Encuentra la solución general de esta ED.
3. Encuentra la solución particular para las condiciones iniciales dadas.
4. Analiza la estabilidad asintótica de la solución y explica su implicación económica.

Solución escalonada:

1. **Formulación de la ED:**
   - Igualando $Q_d = Q_s$: $9 - p + p' + 3p'' = -1 + 4p - p' + 5p''$.
   - Reorganizando términos: $(3-5)p'' + (1-(-1))p' + (-1-4)p = -1-9$.
   - $-2p'' + 2p' - 5p = -10$, o multiplicando por -1: $\mathbf{2p'' - 2p' + 5p = 10}$.
2. **Solución General:**
   - **Homogénea ($p_h(t)$):** $2p'' - 2p' + 5p = 0$. Ecuación característica: $2r^2 - 2r + 5 = 0$.
     - Raíces: $r = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$. Entonces $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$.
     - $p_h(t) = e^{t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)$.
   - **Particular ($p_p(t)$):** Para $h(t) = 10$. Guess: $p_p(t) = A$.
     - Derivadas: $p_p'(t) = 0, p_p''(t) = 0$. Sustituyendo: $5A = 10 \Rightarrow A = 2$.
     - $p_p(t) = 2$.
   - **Solución General Completa:** $\mathbf{p(t) = e^{t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right) + 2}$.
3. **Solución Particular (con $p(0) = 4, p'(0) = 4$):**
   - Usando $p(0) = 4$: $C_1 + 2 = 4 \Rightarrow C_1 = 2$.
   - Derivando $p(t)$ e usando $p'(0) = 4$: $\frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 = 4$.
     - Sustituyendo $C_1 = 2$: $1 + \frac{3}{2}C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = 2$.
   - **Solución Particular Final:** $\mathbf{p(t) = e^{t/2}\left(2\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + 2\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right) + 2}$.

4. **Análisis de Estabilidad Asintótica e Implicación Económica:**
   - **Estabilidad:** La estabilidad asintótica depende de que $p_h(t)$ tienda a cero cuando $t \to \infty$. El teorema de estabilidad exige que **todas las raíces de la ecuación característica tengan parte real negativa**.
   - Las raíces son $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$. La **parte real ($\alpha$) es** $\frac{1}{2}$.
   - Dado que $\alpha = \frac{1}{2} > 0$, el término exponencial $e^{t/2}$ en $p_h(t)$ **tiende a infinito** cuando $t \to \infty$.
   - Por lo tanto, la solución general **no es asintóticamente estable**.
   - **Implicación Económica:** La inestabilidad significa que la trayectoria a largo plazo del precio **dependerá de las condiciones iniciales** (C_1, C_2) y no convergerá a la solución particular $p_p(t) = 2$. De hecho, el precio **tenderá a infinito** a medida que el tiempo avanza, con **oscilaciones crecientes**. Esto sugiere un comportamiento **explosivo e insostenible** del precio en el mercado según este modelo y las expectativas de los agentes, lo cual es irrealista a menos que haya alguna intervención o cambio en el modelo.

Análisis e Ideas Clave

El modelo de mercado con expectativas ilustra la **potencia predictiva y analítica de las ecuaciones diferenciales en economía**. No solo nos permite ver cómo el precio cambia en respuesta al desequilibrio de oferta y demanda, sino que también incorpora la **psicología de los agentes** a través de sus expectativas (tendencia y aceleración del precio). El análisis de estabilidad es aquí el "juez"final del realismo del modelo: una solución inestable, como la obtenida en el ejemplo, indica que las premisas del modelo (por ejemplo, que los agentes amplifican los cambios de precio en lugar de amortiguarlos) conducen a resultados explosivos, lo que desafía la credibilidad del modelo en ausencia de otros factores.

Ideas principales:

- Las ED permiten modelar la **influencia de las expectativas** (tendencia p' y aceleración p'') en la dinámica de mercados económicos.
- La igualación de Q_d y Q_s con términos derivados genera una **ED lineal de segundo orden** para el precio.
- El **análisis de estabilidad asintótica** es crucial para interpretar económicamente el comportamiento del modelo a largo plazo.
- Una solución **inestable** sugiere un comportamiento explosivo o insostenible del precio, lo que puede indicar la necesidad de refinar el modelo o de considerar intervenciones.
- Dominar las ED en economía fortalece la intuición para **analizar sistemas dinámicos** y predecir comportamientos complejos.

Conclusiones Parciales

La aplicación de ecuaciones diferenciales en modelos económicos, particularmente en el análisis de mercados con expectativas de precios, resalta la capacidad de estas herramientas matemáticas para capturar la complejidad y el dinamismo de los sistemas reales. Al incorporar la tendencia y aceleración del precio en las funciones de oferta y demanda, se obtiene una ED de segundo orden que describe la evolución del precio de manera más sofisticada. Sin embargo, la verdadera utilidad del análisis no reside solo en la obtención de la solución general o particular, sino en la **interpretación de su estabilidad asintótica**. Como se demostró en el problema de consolidación, una solución inestable, caracterizada por raíces con parte real positiva, sugiere un comportamiento explosivo y poco realista del precio, instando a una revisión de las hipótesis del modelo o a la consideración de mecanismos de control. Esta síntesis integradora de formulación, resolución y análisis de estabilidad es fundamental para una comprensión crítica y aplicada de los fenómenos económicos dinámicos.

Red Conceptual: Síntesis Integral de Ecuaciones Diferenciales

- **Fundamentos y Clasificación:**
  - **Resumen breve y categorizado:** Las ecuaciones diferenciales (ED) son una herramienta matemática fundamental para modelar sistemas dinámicos, relacionando una función incógnita con sus derivadas. Se clasifican por su tipo (ordinaria o parcial), orden, linealidad y autonomía, y se distingue entre solución general y particular.
  - **Conceptos principales:**
    - **Ecuación Diferencial (ED):** Una relación funcional de la forma $F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}) = 0$, donde $y = y(t)$ es la función incógnita.
    - **ED Ordinaria (EDO):** Una ED donde la función incógnita depende de una sola variable independiente.
    - **ED en Derivadas Parciales (EDP):** Una ED donde la función incógnita depende de dos o más variables independientes.
    - **Orden de una ED:** Máximo orden de derivación que aparece en la ecuación.
    - **Linealidad:** Una ED es lineal si la función incógnita y sus derivadas aparecen elevadas a la potencia unitaria en cada término y no se multiplican entre sí.
    - **ED Autónoma:** Una ED es autónoma si la función F no depende directamente de la variable independiente t.
    - **Forma Normal:** Una ED está en forma normal cuando la derivada de mayor orden puede despejarse, $y^{(k)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$.
    - **Solución General:** La solución expresada en función de constantes indeterminadas, cuyo número es igual al orden de la ED.
    - **Solución Particular:** Una única función obtenida al determinar los valores específicos de la(s) constante(s) de integración.
  - **Relaciones y aplicaciones clave:** La clasificación de una ED es crucial porque determina el método de resolución adecuado y permite anticipar la naturaleza de su solución. Permiten modelar el crecimiento del dinero en un banco.
  - **Secuencia lógica desarrollada del cálculo del tema:**
    - **Ejemplo Básico de Resolución: Crecimiento de Dinero en un Banco ($y'(t) = ry(t)$):**
      1. **Reorganizar la ecuación (Separación de Variables):** Escribir $y'(t)$ como dy/dt, y separar variables: $\frac{y'(t)}{y(t)} = r$.
      2. **Integrar ambos miembros:** $\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int r dt \Rightarrow \ln|y(t)| = rt + C$.
      3. **Despejar $y(t)$ (Exponenciación):** Aplicar la función exponencial para eliminar el logaritmo natural: $y(t) = e^C e^{rt} = y_0 e^{rt}$. La constante y_0 representa el depósito inicial $y(0)$.

- **Problemas con Condiciones y Unicidad:**
  - **Resumen breve y categorizado:** Para encontrar una solución única, la ecuación diferencial se acompaña de condiciones adicionales. Los Problemas con Valores Iniciales (PVI) especifican estas condiciones en un solo punto, mientras que los Problemas con Valores de Frontera (PVF) lo hacen en distintos momentos. El Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad establece los criterios para garantizar la validez de estas soluciones.
  - **Conceptos principales:**
    - **Problema con Valores Iniciales (PVI):** Una ED junto con k condiciones iniciales, especificadas para la función incógnita y/o sus derivadas en un mismo punto del dominio (t_0).
    - **Problema con Valores de Frontera (PVF):** Una ED con condiciones especificadas en distintos momentos del tiempo o puntos del dominio.
    - **Condición de Lipschitz:** Una condición más débil que la diferenciabilidad continua que garantiza la unicidad. La diferenciabilidad continua en un punto implica Lipschitz en ese punto.

- **Axiomas/postulados:**
  - **Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad (para PVI de primer orden $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$):**
    - ◇ **Existencia:** Si la función f es **continua** en una vecindad de (t_0, y_0), entonces existe al menos una solución continuamente diferenciable $y(t)$ en algún intervalo alrededor de t_0.
    - ◇ **Unicidad:** Si, además, la función f es **continuamente diferenciable** (o cumple una condición de Lipschitz) en esa vecindad de (t_0, y_0), entonces la solución $y(t)$ es **única**.
- **Relaciones y aplicaciones clave:** Las condiciones iniciales permiten hallar las constantes indeterminadas. Las ED lineales siempre tienen solución única para PVI. Los PVF son más complejos, pudiendo tener cero, una o infinitas soluciones. En economía, para predecir la trayectoria del precio en un modelo de mercado con expectativas, es indispensable conocer el precio y la tendencia inicial.
- **Secuencia lógica desarrollada del cálculo del tema:**
  - **Ejemplo de No Unicidad en un PVI ($y' = 3y^{2/3}, y(0) = 0$):**
    1. **Verificar las condiciones del Teorema:** $f(y) = 3y^{2/3}$ es continua para todo y (garantiza existencia). Pero $f'(y) = 2y^{-1/3}$ no es continua en $y = 0$ (no garantiza unicidad).
    2. **Encontrar soluciones:**
       - ◇ **Solución trivial:** $y(t) = 0$. Satisface $y'(t) = 0$ y $3(0)^{2/3} = 0$, y $y(0) = 0$.
       - ◇ **Segunda solución (separación de variables):** Integrando $\frac{dy}{3y^{2/3}} = dt$ se obtiene $y(t) = (t + C')^3$. Aplicando $y(0) = 0 \Rightarrow C' = 0$, lo que da $y(t) = t^3$.

    Esto demuestra que para el mismo PVI, existen múltiples soluciones, rompiendo la unicidad.

- **ED Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes ($ay'' + by' + cy = 0$):**
  - **Resumen breve y categorizado:** Son ecuaciones fundamentales que se resuelven proponiendo una solución exponencial ($y = Ce^{rt}$). Este método lleva a la ecuación característica, cuyas raíces (reales distintas, reales iguales o complejas conjugadas) determinan la estructura de la solución general. Este método se extiende a ecuaciones de orden superior.
  - **Conceptos principales:**
    - **Ecuación Característica:** Un polinomio algebraico $ar^2+br+c = 0$, obtenido al sustituir el guess propuesto en la ED homogénea. Sus raíces (r_1, r_2) determinan la estructura de la solución general.
    - **Guess Propuesto:** Una solución asumida de la forma $y = Ce^{rt}$ (o $y = e^{rx}$).
    - **Fórmula de Euler:** $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, utilizada para transformar exponenciales complejas en funciones trigonométricas reales.
    - **Wronskiano:** Un determinante utilizado para verificar la independencia lineal de las soluciones.
  - **Relaciones y aplicaciones clave:** Este método es un pilar fundamental en ingeniería, física y economía para analizar sistemas lineales que exhiben comportamiento oscilatorio, exponencial o amortiguado (ej., oscilador masa-resorte-amortiguador, circuitos RLC, propagación de shocks en macroeconomía). La linealidad de la ED garantiza que la suma de soluciones individuales es también una solución.
  - **Secuencia lógica desarrollada del cálculo del tema:**
    1. **Paso 1 (Formular la Ecuación Característica):**
       - Proponer la solución $y = e^{rt}$, calcular sus derivadas ($y' = re^{rt}, y'' = r^2e^{rt}$).
       - Sustituir en la ED ($ay'' + by' + cy = 0$) y factorizar e^{rt} para obtener el polinomio $ar^2 + br + c = 0$.
    2. **Paso 2 (Resolver las Raíces de la Ecuación Característica):**
       - Usar la fórmula cuadrática $r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

- Identificar el caso de las raíces según el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

3. **Paso 3 (Construir la Solución General $y_h(t)$):**
   - **Raíces Reales y Distintas ($\Delta > 0$):** $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.
   - **Raíces Reales e Iguales ($\Delta = 0$):** $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{rt}$.
   - **Raíces Complejas Conjugadas ($r = \alpha \pm i\beta$, $\Delta < 0$):** $y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$.
4. **Extensión a Orden Superior:** Para una ED de orden n, la ecuación característica es un polinomio de grado n. Las raíces reales con multiplicidad m aportan términos $t^k e^{rt}$ hasta $k = m - 1$. Los pares complejos conjugados con multiplicidad m aportan términos similares con factores t^k multiplicando $\cos(\beta t)$ y $\sin(\beta t)$.
5. **Paso 4 (Aplicar Condiciones Iniciales/de Frontera):** Derivar la solución general $y(t)$, sustituir las condiciones (si son un PVI) para formar un sistema lineal, y resolver para C_1, C_2.

- **ED Lineales No Homogéneas (Completas) ($ay'' + by' + cy = h(t)$):**

  - **Resumen breve y categorizado:** Estas ecuaciones incluyen un término forzante $h(t) \neq 0$. Su solución general se descompone en la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada ($y_h(t)$) y una solución particular de la ecuación completa ($y_p(t)$). El método de los coeficientes indeterminados permite encontrar $y_p(t)$ mediante un "guess informado", con una regla especial de multiplicidad si hay resonancia".
  - **Conceptos principales:**
    - **Término forzante ($h(t)$):** Una función dada que representa una entrada, fuerza externa o estímulo que modifica el comportamiento del sistema.
    - **Solución Homogénea ($y_h(t)$):** La solución general de la ecuación homogénea asociada (cuando el término forzante es cero).
    - **Solución Particular ($y_p(t)$):** Una solución específica de la ecuación diferencial completa (no homogénea) que no contiene constantes de integración indeterminadas.
    - **Método de los Coeficientes Indeterminados:** Una técnica para encontrar $y_p(t)$ cuando el término forzante $h(t)$ es de ciertas formas específicas (polinomios, exponenciales, senos/cosenos o sus productos/sumas). Implica hacer un "guess informado"de $y_p(t)$.
    - **Regla de Multiplicidad (Resonancia):** Si un término del guess propuesto para $y_p(t)$ es ya una solución de la ecuación homogénea asociada (es decir, resuenaçon $y_h(t)$), entonces ese guess debe multiplicarse por t^m (donde m es la multiplicidad de la raíz correspondiente en la ecuación característica).
  - **Axiomas/postulados:**
    - **Principio de Solución de ED No Homogéneas:** La solución general de una ED completa es la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada ($y_h(t)$) y una solución particular de la ecuación completa ($y_p(t)$). Es decir, $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.
  - **Relaciones y aplicaciones clave:** Esencial para modelar sistemas que interactúan con su entorno (ej., un nivel de producción afectado por demanda externa, un oscilador con una fuerza externa). Descompone el comportamiento del sistema en su respuesta naturalz su - espuesta forzada". La regla de multiplicidad es crucial para asegurar la independencia lineal de la solución particular y modelar la amplificación de la respuesta.
  - **Secuencia lógica desarrollada del cálculo del tema (Método de los Coeficientes Indeterminados):**
    1. **Paso 1 (Hallar la Solución Homogénea $y_h(t)$):** Resolver la ecuación homogénea asociada ($ay'' + by' + cy = 0$) utilizando el método de la ecuación característica.
    2. **Paso 2 (Formular el Guess Informado para $y_p(t)$):**
       - Identificar la forma de $h(t)$.
       - Aplicar las reglas básicas: Si $h(t)$ es un polinomio de grado j, guess es polinomio completo de grado j. Si $h(t)$ es Ae^{rt}, guess es Be^{rt}. Si $h(t)$ es $\sin(rt)$ o $\cos(rt)$, guess es $A\sin(rt) + B\cos(rt)$. Para sumas o productos, usar sumas o productos de guesses individuales.

3. **Paso 3 (Aplicar la Regla de Multiplicidad/Resonancia):** Verificar si el guess inicial para $y_p(t)$ contiene algún término que ya es solución de $y_h(t)$. Si hay resonancia (raíz r de multiplicidad m), multiplicar el guess por t^m.
4. **Paso 4 (Calcular Derivadas de $y_p(t)$ y Sustituir):** Derivar $y_p(t)$ tantas veces como el orden de la ED y sustituir en la ED completa original.
5. **Paso 5 (Determinar los Coeficientes Indeterminados):** Agrupar términos por potencias de t, exponenciales, senos/cosenos. Igualar los coeficientes resultantes con los de $h(t)$ en el lado derecho y resolver el sistema de ecuaciones para los coeficientes.
6. **Paso 6 (Escribir la Solución General Completa):** Sumar la solución homogénea $y_h(t)$ y la solución particular $y_p(t)$ con los coeficientes encontrados: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

- **Estabilidad de la Solución:**

  - **Resumen breve y categorizado:** El estudio de la estabilidad de las soluciones responde a la pregunta de qué ocurrirá a largo plazo con el sistema: si volverá a un equilibrio después de una perturbación o si se alejará sin control. La estabilidad asintótica es deseable y está garantizada por el Teorema de Estabilidad, que vincula la parte real de las raíces de la ecuación característica con el comportamiento a largo plazo. El diagrama de fase es una herramienta cualitativa útil para ED autónomas de primer orden.
  - **Conceptos principales:**
    - **Estabilidad Asintótica:** La solución general de la ecuación diferencial completa es asintóticamente estable si la solución general de la ecuación homogénea ($y_h(t)$) tiende a cero cuando $t \to \infty$. Implica que la trayectoria a largo plazo no depende de las condiciones iniciales.
    - **Inestable:** La solución es inestable si $y_h(t)$ no tiende a cero.
    - **Diagrama de Fase (para ED de Primer Orden Autónomas $y' = f(y)$):** Una herramienta gráfica para analizar cualitativamente la solución, que consiste en el gráfico de $f(y)$ en el plano (y, y').
    - **Equilibrios (en Diagrama de Fase):** Puntos donde $y' = f(y) = 0$.
  - **Axiomas/postulados:**
    - **Teorema de Estabilidad:** La solución general de una ecuación diferencial lineal es **estable si y solo si todas las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa** ($\Re(\lambda) < 0$).
  - **Relaciones y aplicaciones clave:** El análisis de estabilidad es crucial en economía para entender si un mercado, después de una perturbación, vuelve al precio de equilibrio o si se desestabiliza. La estabilidad asintótica asegura que la trayectoria a largo plazo del sistema converge a la solución particular ($y_p(t)$). El Diagrama de Fase permite visualizar la dinámica y la estabilidad de los equilibrios de forma intuitiva, y su criterio cualitativo de estabilidad coincide con el cuantitativo de raíces negativas para ED lineales de primer orden.
  - **Secuencia lógica desarrollada del cálculo del tema (Análisis Detallado de Estabilidad por Tipo de Raíces):**
    1. **Raíces Reales y Distintas ($r_1, r_2, \ldots, r_n$):** La solución es asintóticamente estable **sii todas las raíces r_i son negativas** ($r_i < 0$).
    2. **Raíces Reales e Iguales (Múltiples, r con multiplicidad m):** La solución es asintóticamente estable **sii la raíz r es negativa** ($r < 0$). (Los términos $t^k e^{rt}$ tienden a cero si $r < 0$).
    3. **Raíces Complejas y Conjugadas ($\alpha \pm i\beta$):** La solución es asintóticamente estable **sii la parte real α es negativa** ($\alpha < 0$). (α controla el crecimiento o decaimiento exponencial; β controla la frecuencia de oscilación).
    4. **Raíces Complejas Iguales (Múltiples, $\alpha \pm i\beta$ con multiplicidad m):** La solución es asintóticamente estable **sii la parte real α es negativa** ($\alpha < 0$).
    5. **Diagrama de Fase (para ED de Primer Orden Autónoma $y' = f(y)$):**
       - **Hallar los Equilibrios:** Resolver $y' = f(y) = 0$.

- **Construir el Diagrama de Fase (Sentido del Movimiento):** Graficar $f(y)$ en el plano (y, y'). Dibujar flechas en el eje y según el signo de $f(y)$ en los intervalos entre equilibrios: si $f(y) > 0 \Rightarrow$ flechas $\rightarrow$; si $f(y) < 0 \Rightarrow$ flechas $\leftarrow$.
- **Clasificar la Estabilidad de los Equilibrios:**
  - **Estable:** Si las flechas apuntan hacia el equilibrio desde ambos lados (pendiente negativa de $f(y)$ en el equilibrio).
  - **Inestable:** Si las flechas se alejan del equilibrio en ambas direcciones (pendiente positiva de $f(y)$ en el equilibrio).
  - **Semiestable:** Si las flechas entran por un lado y salen por el otro.

- **Aplicaciones Económicas Clave:**

  - **Resumen breve y categorizado:** Las ecuaciones diferenciales son el lenguaje para describir y analizar fenómenos económicos dinámicos. Permiten modelar dinámicas complejas donde los agentes económicos reaccionan a las variables actuales, sus tendencias y aceleraciones. El análisis de estabilidad es crucial para comprender si un sistema económico converge a un equilibrio o si exhibe comportamientos explosivos e insostenibles.
  - **Conceptos principales:**
    - **Modelo de Mercado con Expectativas de Precios:** Un modelo donde las cantidades demandadas (Q_d) y ofertadas (Q_s) dependen no solo del precio actual (p), sino también de su tendencia (p') y aceleración (p'').
    - **Expectativas Naïve (Ingenuas):** Una hipótesis simplificadora donde los agentes suponen que el precio futuro será el actual, es decir, $p^e = p$.
    - **Velocidad de Ajuste (k):** En modelos de ajuste por exceso de demanda ($\dot{p} = k[D(p) - S(p)]$), $k > 0$ mide la rapidez con la que el precio reacciona al desequilibrio.
  - **Relaciones y aplicaciones clave:** La igualación de oferta y demanda ($Q_s = Q_d$) conduce a una ecuación diferencial lineal de segundo orden para el precio. El análisis de estabilidad es el "juez"final del realismo económico del modelo: una solución inestable sugiere que los supuestos del modelo llevan a un escenario de mercado .$^{\text{ex}}$plosivo.$^{\text{o}}$ ïnsostenible". Por ejemplo, en un modelo donde el precio tiende a infinito con oscilaciones crecientes, el comportamiento es irrealista sin intervención.
  - **Secuencia lógica desarrollada del cálculo del tema (Modelo de Mercado con Expectativas de Precios):**
    1. **Paso 1 (Formulación de la ED):** A partir de las funciones de oferta y demanda que incluyen p, p', p'', igualar $Q_d = Q_s$ y reorganizar los términos para obtener una ED lineal de segundo orden para $p(t)$. Por ejemplo, $2p'' - 2p' + 5p = 10$.
    2. **Paso 2 (Solución General):** Encontrar la solución homogénea $p_h(t)$ (usando el método de la ecuación característica) y una solución particular $p_p(t)$ (usando coeficientes indeterminados) para obtener $p(t) = p_h(t) + p_p(t)$.
    3. **Paso 3 (Solución Particular con Condiciones Iniciales):** Aplicar las condiciones iniciales dadas a $p(t)$ y $p'(t)$ para determinar las constantes de integración y obtener una solución particular específica.
    4. **Paso 4 (Análisis de Estabilidad Asintótica e Implicación Económica):**
       - Evaluar la parte real (α) de las raíces de la ecuación característica de la parte homogénea.
       - Si $\alpha > 0$, la solución es inestable, lo que significa que el precio tenderá a infinito (o crecerá con oscilaciones crecientes), dependiendo de las condiciones iniciales.
       - **Implicación Económica:** Un comportamiento inestable sugiere un modelo de mercado explosivo e insostenible, lo que podría indicar la necesidad de revisar los supuestos del modelo o considerar intervenciones. Si la solución fuera estable, el precio convergería a un equilibrio a largo plazo.

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones

Toobaziti

Disclaimer: Este documento se ha elaborado a partir de la grabación de una clase, la presentación visual consultada y/o el material bibliográfico recomendado. Dada la naturaleza de su composición, podría contener imprecisiones u omisiones derivadas de la calidad del audio, interrupciones involuntarias o errores de redacción. Se recomienda siempre consultar la grabación o fuente original correspondiente para confirmar cualquier detalle en caso de duda.

Índice

1. Fundamentos de los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales **1**
- 1.1. Definiciones Clave y Tipos de Sistemas . . . 1
- 1.2. Equivalencia entre Ecuaciones de Orden Superior y Sistemas de Primer Orden . . . 1
- 1.3. Notación Vectorial, Existencia y Unicidad de Soluciones . . . 2
- 1.4. Equilibrios y Estabilidad (Noción Básica) . . . 2

2. Resolución de Sistemas Lineales Homogéneos **3**
- 2.1. Resolución por Autovalores y Autovectores (Caso Diagonalizable) . . . 3
- 2.2. Autovalores Complejos . . . 4
- 2.3. Casos No Diagonalizables (Autovalores Repetidos con Defecto) . . . 5

3. Resolución de Sistemas Lineales No Homogéneos **7**
- 3.1. El Método de Coeficientes Indeterminados . . . 7
- 3.2. Estrategias según el Forzante $\mathbf{h}(t)$ . . . 8
- 3.3. Resonancia . . . 8
- 3.4. Ejemplo Calculado: Forzante Polinomial . . . 8
- 3.5. Problema de Consolidación: Macroeconomía (IS-LM Linealizado con Política Fiscal Oscilante) . . . 9

4. Diagramas de Fase y Estabilidad de Equilibrios **10**
- 4.1. Diagramas de Fase en 1D (Línea de Fase) . . . 11
- 4.2. Diagramas de Fase en 2D (Retrato de Fase) . . . 11
- 4.3. Tipos de Equilibrio y Autovalores . . . 12
- 4.4. Estabilidad Local de Sistemas No Lineales (Linealización) . . . 12
- 4.5. Plano Traza-Determinante (para Sistemas 2x2) . . . 13

5. Aplicaciones Económicas Clave **13**
- 5.1. Curva de Phillips Aumentada . . . 14
- 5.2. Brecha de Producto y Dinámica de Inflación (IS + Regla Monetaria) . . . 14
- 5.3. Modelo de Solow (Capital per cápita) . . . 15
- 5.4. Ajuste de Precios (Tâtonnement) . . . 16
- 5.5. Problema de Consolidación: Crecimiento de Ramsey 2D (con solución guiada) . . . 16

1. Fundamentos de los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Introducción

Los sistemas de ecuaciones diferenciales (SED) son una herramienta fundamental para modelar la evolución conjunta de múltiples variables interdependientes a lo largo del tiempo. Permiten analizar cómo interactúan fenómenos complejos, ofreciendo un marco matemático para describir cambios y predecir comportamientos futuros en diversas disciplinas, incluyendo la economía.

Temas y subtemas

Esta sección introduce la *definición* y los tipos principales de SED, destacando su *importancia* en el modelado económico al capturar *fenómenos acoplados* y *retroalimentaciones cruzadas*. Se examina la *equivalencia* crucial entre ecuaciones diferenciales de orden superior y sistemas de primer orden, unificando así las técnicas de análisis. También se abordan la *notación vectorial*, las condiciones para la *existencia y unicidad* de soluciones, y las nociones básicas de *equilibrios* y *estabilidad*, sentando las bases para comprender cómo las variables económicas alcanzan estados estacionarios o siguen trayectorias dinámicas.

1.1. Definiciones Clave y Tipos de Sistemas

Un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)* describe la evolución temporal de un vector de variables de estado. Se expresa comúnmente en notación vectorial como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(t, \mathbf{x}(t)\big), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

Donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el *vector de estado* (las variables del sistema), $\dot{\mathbf{x}}$ son sus tasas de cambio, y $\mathbf{f}$ es la *ley de movimiento*.

- **Sistema Autónomo:** Si la función $\mathbf{f}$ no depende explícitamente del tiempo t, el sistema es autónomo: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.
- **Sistema Lineal:** Cuando la ley de movimiento es lineal en $\mathbf{x}$, el sistema es de la forma $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$. Si la matriz A es constante y $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$, es un *sistema lineal homogéneo*.

1.2. Equivalencia entre Ecuaciones de Orden Superior y Sistemas de Primer Orden

Una característica fundamental es que "toda ecuación diferencial de segundo orden es equivalente a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden". Este procedimiento es "válido para convertir una ecuación diferencial de orden n en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden".

Proceso de Conversión

Dada una EDO escalar de *orden* m de la forma:

$$y^{(m)} = F\big(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}\big) \tag{2}$$

Se define un *vector de estado aumentado* con variables auxiliares:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y' \\ &\vdots \\ x_m &= y^{(m-1)} \end{aligned}$$

Esto transforma la EDO en un sistema de m ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \dot{x}_{m-1} &= x_m \\ \dot{x}_m &= F(t, x_1, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

Esta *equivalencia* es crucial porque unifica las técnicas de análisis, permitiendo el uso de herramientas de álgebra lineal.

Ejemplo Calculado: Conversión de EDO de 2º Orden

Considere la EDO:

$$y'' - 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{3}$$

Paso 1: Definir variables de estado. Sea $x_1 = y$ (posición) y $x_2 = y'$ (velocidad). **Paso 2: Formular el sistema de primer orden.** Derivando x_1 obtenemos la primera ecuación:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Sustituyendo y, y', y'' en la EDO original con $x_1, x_2, \dot{x}_2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 - 3x_2 + 2x_1 &= e^t \\ \dot{x}_2 &= 3x_2 - 2x_1 + e^t \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 + e^t \end{cases} \tag{4}$$

En notación matricial, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Este proceso es fundamental para aplicar métodos de resolución y análisis de sistemas lineales.

1.3. Notación Vectorial, Existencia y Unicidad de Soluciones

La notación vectorial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ asigna a cada punto $(t, \mathbf{x})$ un *vector de velocidad*. Si $\mathbf{f}$ no depende de t, el sistema es *autónomo* y las soluciones son curvas tangentes a esas flechas, conocidas como *trayectorias*.

Existencia y Unicidad

Para que un problema de valor inicial tenga *una única solución* en un intervalo, se requiere que $\mathbf{f}$ sea continua en una región y *localmente Lipschitz* en $\mathbf{x}$ (Teorema de Picard–Lindelöf).

- **Intuitivo:** Si los çampos de flechas"no se cruzan, no hay dos trayectorias que pasen por el mismo punto con distinta dirección, garantizando que el modelo sea *determinista* y no ambiguo.
- **Importancia Económica:** Garantiza que, dadas unas condiciones iniciales, la evolución del sistema económico es predecible y no ambigua.

1.4. Equilibrios y Estabilidad (Noción Básica)

Un *equilibrio* $\mathbf{x}^*$ de un sistema autónomo es un punto donde la tasa de cambio de todas las variables es cero, es decir, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Para un sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, el equilibrio satisface $A\mathbf{x}^* + \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Si A es invertible, el equilibrio es $\mathbf{x}^* = -A^{-1}\mathbf{b}$.

Estabilidad Lineal

La *estabilidad* de un equilibrio en sistemas lineales homogéneos $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ se determina por las *partes reales de los autovalores* de la matriz A.

- Si todos los autovalores de A tienen *parte real negativa*, el equilibrio es *asintóticamente estable*. Intuitivamente, las trayectorias .ªpuntan hacia.el equilibrio desde sus alrededores, y el sistema converge a él.
- Si al menos un autovalor tiene *parte real positiva*, el equilibrio es *inestable*.

Análisis e Ideas Clave

Intuitivo Económico (Sin Números): Imaginen el mercado de un bien donde el precio y la cantidad producida se ajustan mutuamente. Un *equilibrio* sería un nivel de precio y cantidad donde ni el precio tiende a subir o bajar, ni la producción a aumentar o disminuir. La *estabilidad* nos diría si, ante una pequeña perturbación (como un shock de demanda transitorio), el mercado regresa a ese equilibrio con el tiempo, o si, por el contrario, se aleja de él, provocando desequilibrios persistentes.
Intuitivo No Técnico (Sin Números): Piensen en una bola en el fondo de un tazón: ese es un *equilibrio estable*. Si la empujan, regresa al fondo. Si la bola está en la cima de una colina, ese es un *equilibrio inestable*: cualquier pequeño empujón la hará rodar cuesta abajo y alejarse. La "ley de movimiento"del sistema describe cómo la bola se mueve en el "paisaje"de las variables, y la estabilidad nos dice si el "fondo del tazón.o la çima de la colina.es el destino final de las trayectorias cercanas.

2. Resolución de Sistemas Lineales Homogéneos

Introducción

Los sistemas lineales homogéneos de primer orden con coeficientes constantes son cruciales para entender la dinámica de muchos modelos. Su resolución explícita nos permite no solo predecir las trayectorias futuras de las variables, sino también analizar la estabilidad y las direcciones de movimiento alrededor de un equilibrio, que es fundamental en la economía dinámica.

Temas y subtemas

Esta sección aborda la *resolución* de sistemas lineales homogéneos de la forma $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Se inicia con el *caso diagonalizable*, donde la matriz A posee una base completa de autovectores, lo que permite desacoplar el sistema y resolverlo fácilmente. Luego, se explora el tratamiento de *autovalores complejos*, que dan lugar a comportamientos oscilatorios como focos y centros. Finalmente, se analizan los *casos no diagonalizables*, donde los autovalores repetidos con defecto geométrico introducen términos polinomiales en el tiempo, enriqueciendo la descripción de la dinámica y la estabilidad.

2.1. Resolución por Autovalores y Autovectores (Caso Diagonalizable)

Un sistema lineal homogéneo de primer orden con coeficientes constantes se escribe como $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Si la matriz A es *diagonalizable* (es decir, tiene n autovectores linealmente independientes), la solución general es una combinación lineal de exponenciales multiplicadas por autovectores.

Proposición y Solución General

Proposición: Si A es diagonalizable, entonces la solución al sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ es:

$$\mathbf{y}(t) = C_1\mathbf{x}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{x}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n\mathbf{x}_n e^{\lambda_n t} \tag{6}$$

Donde λ_i es un *autovalor* de A y $\mathbf{x}_i$ es su *autovector asociado*.

Proceso Detallado de Resolución

El proceso para obtener esta solución es el siguiente:

1. **Hallar los autovalores (λ_i) de A.** Se resuelven las raíces del *polinomio característico* $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. **Hallar los autovectores ($\mathbf{v}_i$) asociados a cada λ_i.** Para cada autovalor, se resuelve el sistema $(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
3. **Formar la matriz de autovectores P y la matriz diagonal de autovalores Λ.** Las columnas de P son los autovectores $\mathbf{v}_i$. Λ es una matriz diagonal con los autovalores λ_i en su diagonal.
4. **Realizar un cambio de variables.** Se define $\mathbf{z}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$, lo que implica $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{z}(t)$.
5. **Desacoplar el sistema.** Al derivar y sustituir, se obtiene un sistema desacoplado en las nuevas coordenadas: $\dot{\mathbf{z}} = \Lambda\mathbf{z}$.
6. **Resolver cada ecuación escalar.** Como Λ es diagonal, cada componente $z_i(t)$ evoluciona independientemente como $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$, cuya solución es $z_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$.
7. **Volver a las coordenadas originales.** Finalmente, se usa la transformación inversa $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{z}(t)$ para obtener la solución general en las variables originales.

Ejemplo Calculado: Autovalores Reales Distintos

Considere el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. **Paso 1: Autovalores.** Dado que A es triangular superior, los autovalores son los elementos de la diagonal: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. **Paso 2: Autovectores.**

- Para $\lambda_1 = -1$: Resolver $(A - (-1)I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow (A + I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Esto implica $2v_{1,2} = 0$, por lo que $v_{1,2} = 0$ y $v_{1,1}$ es libre. Elegimos $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Para $\lambda_2 = -3$: Resolver $(A - (-3)I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow (A + 3I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Esto implica $2v_{2,1} + 2v_{2,2} = 0$, por lo que $v_{2,2} = -v_{2,1}$. Elegimos $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Paso 3: Solución General. La solución general es $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$.

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} \tag{7}$$

Esto se descompone en:

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$
$$x_2(t) = -C_2 e^{-3t}$$

2.2. Autovalores Complejos

Cuando la matriz A es real y posee un par de *autovalores complejos conjugados* de la forma $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (con $\beta \neq 0$), la solución real del sistema exhibe un comportamiento oscilatorio.

Interpretación y Solución Real

- La parte real α determina si la oscilación se *amortigua* ($\alpha < 0$), *amplifica* ($\alpha > 0$) o es *neutra* ($\alpha = 0$).
- La parte imaginaria β representa la *frecuencia de la oscilación* o rotación.

Las trayectorias en el diagrama de fase se presentan como *espirales* o *órbitas cerradas*:

- $\alpha < 0$: *Foco estable* (espiral entrante). Las trayectorias convergen al equilibrio en forma de espiral.
- $\alpha > 0$: *Foco inestable* (espiral saliente). Las trayectorias divergen del equilibrio en forma de espiral.
- $\alpha = 0$: *Centro* o *Vórtice*. Las trayectorias orbitan alrededor del equilibrio sin converger ni alejarse.

Si $\mathbf{z} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$ es un autovector complejo asociado a $\lambda = \alpha + i\beta$, dos soluciones reales linealmente independientes son:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{v}\cos\beta t - \mathbf{w}\sin\beta t) \tag{8}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{v}\sin\beta t + \mathbf{w}\cos\beta t) \tag{9}$$

La solución general es $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t)$.

Ejemplo Calculado: Autovalores Complejos

Considere el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **Paso 1: Autovalores.** El polinomio característico es $\det(A - \lambda I) = (-\frac{1}{2} - \lambda)^2 + 4 = \lambda^2 + \lambda + \frac{17}{4} = 0$. Las raíces son $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(17/4)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-17}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-1 \pm 4i}{2} = -\frac{1}{2} \pm 2i$. Aquí, $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\beta = 2$. **Paso 2: Autovector complejo.** Para $\lambda = -\frac{1}{2} + 2i$, resolvemos $(A - \lambda I)\mathbf{z} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación, $-2iz_1 - 2z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = -iz_1$. Si elegimos $z_1 = 1$, entonces $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Separamos $\mathbf{z}$ en sus partes real e imaginaria: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. **Paso 3: Soluciones Reales.** Usando las fórmulas de solución real:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-t/2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin(2t)\right) = e^{-t/2}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-t/2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(2t)\right) = e^{-t/2}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

La solución general es $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t)$. Dado que $\alpha = -1/2 < 0$, este es un *foco estable*.

2.3. Casos No Diagonalizables (Autovalores Repetidos con Defecto)

Un sistema es *no diagonalizable* cuando un autovalor λ tiene una *multiplicidad algebraica* m mayor que su *multiplicidad geométrica* g (número de autovectores linealmente independientes asociados a λ). En estos casos, la base de autovectores no es completa, y la matriz no puede ser diagonalizada a la forma Λ. En su lugar, se recurre a la *forma canónica de Jordan* y a *cadenas de autovectores generalizados*.

Estructura de la Solución

La solución general incluye *términos polinomiales en* t multiplicando exponenciales, como $te^{\lambda t}$ o $\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}$. Esto se debe a que la exponencial de un bloque de Jordan no trivial genera esta forma:

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda t}\left(I + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots\right) \tag{10}$$

Donde N es una matriz nilpotente (unos en la supradiagonal) y la serie es finita porque $N^k = 0$ para alguna potencia k.

Estabilidad

- Si $\Re(\lambda) < 0$, la solución *converge asintóticamente* a cero, aunque los términos polinomiales en t pueden ralentizar la convergencia o generar çolas pesadas".
- Si $\Re(\lambda) > 0$, la solución *diverge*, y los términos polinomiales aceleran esta divergencia.
- Si $\Re(\lambda) = 0$ y existe un bloque de Jordan de tamaño ≥ 2, la presencia de factores t impide la estabilidad de Lyapunov (la solución crece $\sim t$), convirtiendo el equilibrio en *inestable*.

La construcción de soluciones involucra encontrar *cadenas de Jordan*: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ que satisfacen $(A - \lambda I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, etc.

Ejemplo Calculado: Bloque de Jordan de Tamaño 2

Considere el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **Paso 1: Espectro y Defecto.** El polinomio característico es $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 2. El espacio propio $\ker(A - 2I)$ se encuentra resolviendo $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica $v_2 = 0$, y v_1 es libre. El único autovector linealmente independiente es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La multiplicidad geométrica es 1, menor que la algebraica (2), por lo tanto, no es diagonalizable. **Paso 2: Cadena de Jordan.** Tomamos $\mathbf{v}_1 = \binom{1}{0}$ como autovector. Buscamos $\mathbf{v}_2$ tal que $(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica $b = 1$. Podemos elegir $a = 0$, por lo que $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **Paso 3: Soluciones Fundamentales.** Para un bloque de Jordan de tamaño 2, las soluciones fundamentales son:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda t}(t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Solución General. La solución general es $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_2 \end{pmatrix}$. Dado que $\lambda = 2 > 0$, este sistema es inestable; el término te^{2t} indica una inercia estructural que acelera la divergencia.

Análisis e Ideas Clave

Intuitivo Económico (Sin Números): Imaginen que el precio y las existencias de un bien se ajustan. Si los autovalores son *reales y negativos* (nodo estable), tanto el precio como las existencias se acercan al equilibrio de forma suave y directa. Si son *complejos con parte real negativa* (foco estable), el precio podría "sobrecorregir", oscilando alrededor del equilibrio antes de estabilizarse, como una resaca. Si el sistema es *no diagonalizable* (términos $te^{\lambda t}$), implica una ïnercia.[en] el ajuste; una variable arrastra a la otra, haciendo que la convergencia sea más lenta o que, incluso con estabilidad de fondo, las desviaciones temporales sean más pronunciadas o persistentes.
Intuitivo No Técnico (Sin Números): Piensen en un columpio que se va frenando solo (foco estable, autovalores complejos con parte real negativa): se mueve de un lado a otro (oscilación) pero cada vez menos (amortiguamiento) hasta detenerse en el centro. Si el columpio no tuviera fricción, seguiría moviéndose indefinidamente (centro, autovalores complejos con parte real nula). Ahora, imaginen un carro con las ruedas ligeramente desalineadas (no diagonalizable, término $te^{\lambda t}$). Aunque lo corrijan, siempre tenderá a desviarse un poco más con el tiempo, incluso si el motor no está acelerando. Esa ïnercia"de desviación se representa con esos términos polinomiales en el tiempo.

3. Resolución de Sistemas Lineales No Homogéneos

Introducción

Los sistemas lineales no homogéneos, de la forma $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t)$, son fundamentales para analizar la respuesta de un sistema a *shocks externos* o *forzamientos*. Permiten comprender cómo los impactos fiscales, monetarios o estacionales influyen en la trayectoria de las variables económicas, distinguiendo entre la dinámica intrínseca del sistema y la respuesta inducida por fuerzas externas.

Temas y subtemas

Esta sección se centra en la resolución de sistemas no homogéneos mediante el *método de coeficientes indeterminados*. Se explica que la solución general es la suma de una *solución homogénea* (que describe la dinámica transitoria) y una *solución particular* (que captura la respuesta forzada). Se detallan *estrategias* para proponer un *ansatz* adecuado para la solución particular según la forma *PET* (polinomial-exponencial-trigonométrica) del término de forzamiento. Se aborda el concepto de *resonancia* y cómo manejarlo, y se presentan ejemplos calculados, junto con análisis e ideas clave para su interpretación económica.

3.1. El Método de Coeficientes Indeterminados

La solución general de un sistema lineal no homogéneo $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t)$ se descompone en dos partes:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) \tag{11}$$

- $\mathbf{x}_h(t)$ es la *solución homogénea*, obtenida resolviendo $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ (discutida en la Sección 2). Esta parte representa la *respuesta transitoria* del sistema.
- $\mathbf{x}_p(t)$ es una *solución particular*, que representa la *respuesta forzada* por $\mathbf{h}(t)$.

El *método de coeficientes indeterminados* es aplicable cuando $\mathbf{h}(t)$ es una combinación lineal de funciones de tipo *polinomial-exponencial-trigonométrica (PET)*.

Proceso Detallado

El método sigue los siguientes pasos:

1. **Identificar la forma PET de $\mathbf{h}(t)$.** Esto incluye funciones constantes, polinomiales, exponenciales, trigonométricas (seno/coseno) o combinaciones de ellas.
2. **Proponer un *ansatz* $\mathbf{x}_p(t)$.** Se propone una función con la *misma estructura funcional* que $\mathbf{h}(t)$, pero con *vectores de coeficientes desconocidos*.
3. **Derivar $\dot{\mathbf{x}}_p(t)$ y sustituir en la ecuación no homogénea.** Se sustituyen $\mathbf{x}_p(t)$ y $\dot{\mathbf{x}}_p(t)$ en $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$.
4. **Igualar coeficientes.** Se agrupan los términos por tipo de función (e.g., $e^{\alpha t}$, $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, potencias de t) e se igualan los coeficientes de las funciones linealmente independientes en ambos lados de la ecuación.
5. **Resolver el sistema lineal.** Esto da un sistema de ecuaciones algebraicas para los coeficientes desconocidos, que se resuelven.
6. **Manejar la Resonancia (si aplica).** Si el ansatz propuesto resulta ser una solución de la parte homogénea, se debe multiplicar por t^s.
7. **Formar la solución general.** Se suma $\mathbf{x}_h(t)$ y $\mathbf{x}_p(t)$. Si hay condiciones iniciales, se usan para determinar las constantes de $\mathbf{x}_h(t)$.

3.2. Estrategias según el Forzante $\mathbf{h}(t)$

El ansatz $\mathbf{x}_p(t)$ se elige en función de la forma del término de forzamiento $\mathbf{h}(t)$:

- **Forzante Constante:** $\mathbf{h}(t) = \mathbf{b}$ (vector constante).
  - **Ansatz:** $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{u}$ (vector constante).
  - **Sustitución:** $\mathbf{0} = A\mathbf{u} + \mathbf{b} \Rightarrow A\mathbf{u} = -\mathbf{b}$.
  - **Solución:** Si A es invertible, $\mathbf{u} = -A^{-1}\mathbf{b}$.
- **Forzante Polinomial:** $\mathbf{h}(t) = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{b}_k t^k$.
  - **Ansatz:** $\mathbf{x}_p(t) = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{u}_k t^k$ (polinomio del mismo grado).
- **Forzante Exponencial:** $\mathbf{h}(t) = e^{\alpha t}\mathbf{b}$.
  - **Ansatz:** $\mathbf{x}_p(t) = e^{\alpha t}\mathbf{u}$.
  - **Sustitución:** $\alpha e^{\alpha t}\mathbf{u} = Ae^{\alpha t}\mathbf{u} + e^{\alpha t}\mathbf{b} \Rightarrow (\alpha I - A)\mathbf{u} = \mathbf{b}$.
  - **Solución:** Si $\det(\alpha I - A) \neq 0$, $\mathbf{u} = (\alpha I - A)^{-1}\mathbf{b}$.
- **Forzante Trigonométrico:** $\mathbf{h}(t) = \mathbf{b}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{b}_2 \sin(\omega t)$.
  - **Ansatz:** $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{u}\cos(\omega t) + \mathbf{v}\sin(\omega t)$.

3.3. Resonancia

La *resonancia* ocurre cuando el ansatz propuesto para $\mathbf{x}_p(t)$ es ya una solución del sistema homogéneo. Esto sucede si:

- El exponente α del forzante $e^{\alpha t}$ es un autovalor de A.
- $i\omega$ (o $-i\omega$) es un autovalor de A para forzantes trigonométricos.

Regla para la Resonancia: En estos casos, se debe multiplicar el ansatz por t^s, donde s es la *mínima potencia de t* necesaria para romper la dependencia lineal (típicamente, el tamaño del bloque de Jordan asociado al autovalor resonante).

- Ejemplo: Si $\mathbf{h}(t) = e^{\alpha t}\mathbf{b}$ y α es un autovalor simple de A, se usa $\mathbf{x}_p(t) = te^{\alpha t}\mathbf{u}$.

3.4. Ejemplo Calculado: Forzante Polinomial

Considere el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$. **Paso 1: Proponer el ansatz.** Dado que el forzante es polinomial de grado 1, proponemos $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{u}t + \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ son vectores de coeficientes desconocidos. **Paso 2: Derivar y sustituir.** La derivada es $\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{u}$. Sustituyendo en el sistema:

$$\mathbf{u} = A(\mathbf{u}t + \mathbf{v}) + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = (A\mathbf{u})t + A\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Igualar coeficientes.

- Para los términos en t: $\mathbf{0} = A\mathbf{u} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\mathbf{u} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Para los términos constantes: $\mathbf{u} = A\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\mathbf{v} = \mathbf{u} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Paso 4: Resolver para u y v. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Resolver $A\mathbf{u} = -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$:

$$-u_1 + u_2 = -1$$
$$-2u_1 - u_2 = 0$$

De la segunda ecuación, $u_2 = -2u_1$. Sustituyendo en la primera: $-u_1 - 2u_1 = -1 \Rightarrow -3u_1 = -1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{3}$. Entonces $u_2 = -\frac{2}{3}$. Así, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

- Resolver $A\mathbf{v} = \mathbf{u} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$:

$$-v_1 + v_2 = \tfrac{1}{3}$$
$$-2v_1 - v_2 = -\tfrac{5}{3}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-3v_1 = -\frac{4}{3} \Rightarrow v_1 = \frac{4}{9}$. Entonces $v_2 = \frac{1}{3} + v_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$. Así, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\\frac{7}{9}\end{pmatrix}$.

Paso 5: Solución particular.

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\\frac{7}{9}\end{pmatrix} \tag{12}$$

La solución general es $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$.

3.5. Problema de Consolidación: Macroeconomía (IS-LM Linealizado con Política Fiscal Oscilante)

Teoría: Este modelo linealizado IS-LM explora cómo la producción (y) y la tasa de interés (r) responden a una política fiscal que combina un gasto constante y uno oscilante. La solución permite separar el nivel de estado estable de largo plazo del gasto promedio, y la amplitud y el desfase de los ciclos de y y r frente a la oscilación fiscal. La estabilidad de la matriz A determina si la respuesta transitoria decae, dejando solo la respuesta forzada a largo plazo.
Modelo:

$$\dot{y} = -a\,y - b\,r + g_0 + g_1\sin(\omega t)$$
$$\dot{r} = c\,y - d\,r$$

Donde $a, b, c, d > 0$. En forma matricial, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}y\\r\end{pmatrix}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t), \quad A = \begin{pmatrix}-a & -b\\ c & -d\end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix}g_0 + g_1\sin(\omega t)\\ 0\end{pmatrix} \tag{13}$$

Cálculo escalonado: Paso 1: Resolver la parte constante del forzante ($g_1 = 0$). Proponemos $\mathbf{x}_{p,0} = \mathbf{u}$ (vector constante). Sustituyendo: $A\mathbf{u} + \begin{pmatrix}g_0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow A\mathbf{u} = -\begin{pmatrix}g_0\\0\end{pmatrix}$. Asumiendo A es invertible:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad + bc}\begin{pmatrix}-d & b\\ -c & -a\end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\mathbf{u} = -A^{-1}\begin{pmatrix}g_0\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{ad+bc}\begin{pmatrix}-d & b\\ -c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_0\\0\end{pmatrix} = \frac{g_0}{ad+bc}\begin{pmatrix}d\\c\end{pmatrix} \tag{14}$$

Esta $\mathbf{u}$ representa el *nuevo nivel de estado estable* de y y r bajo un gasto constante g_0.
Paso 2: Resolver la parte sinusoidal del forzante ($g_0 = 0$). Proponemos $\mathbf{x}_{p,\sin} = \mathbf{v}\cos(\omega t) + \mathbf{u}\sin(\omega t)$ (usando $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ para los coeficientes vectoriales). Derivando: $\dot{\mathbf{x}}_{p,\sin} = -\omega\mathbf{v}\sin(\omega t) + \omega\mathbf{u}\cos(\omega t)$. Sustituyendo en el sistema con $\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix}g_1\sin(\omega t)\\0\end{pmatrix}$:

$$-\omega\mathbf{v}\sin(\omega t) + \omega\mathbf{u}\cos(\omega t) = A(\mathbf{v}\cos(\omega t) + \mathbf{u}\sin(\omega t)) + \begin{pmatrix}g_1\sin(\omega t)\\0\end{pmatrix}$$

Igualando coeficientes de $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$:

$$\omega \mathbf{u} = A\mathbf{v}$$
$$-\omega \mathbf{v} = A\mathbf{u} + \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación, $\mathbf{v} = \omega A^{-1}\mathbf{u}$. Sustituyendo en la segunda:

$$-\omega(\omega A^{-1}\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\omega^2 A^{-1}\mathbf{u} = A\mathbf{u} + \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por A:

$$(A^2 + \omega^2 I)\mathbf{u} = -A \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Este sistema lineal se resuelve para $\mathbf{u}$, y luego $\mathbf{v} = \omega A^{-1}\mathbf{u}$ se calcula. Estos vectores determinarán la amplitud y el desfase de las oscilaciones.
Interpretación: La solución total del sistema será la suma de la solución homogénea $\mathbf{x}_h(t)$ (que decae si el sistema es estable) más la solución particular $\mathbf{x}_{p,0}$ (el nuevo estado estacionario) y la solución $\mathbf{x}_{p,\sin}$ (los ciclos de y y r).

- La parte constante $\mathbf{x}_{p,0}$ indica el *nivel de largo plazo* de producción y tasa de interés bajo el gasto promedio g_0.
- La parte sinusoidal $\mathbf{x}_{p,\sin}$ cuantifica la *amplitud* y el *desfase* de la producción y la tasa de interés en respuesta a los *ciclos de política fiscal*.
- Si la matriz A es estable (autovalores con parte real negativa), la solución transitoria $e^{At}\mathbf{c}$ muere con el tiempo, y solo se observará la trayectoria forzada, un ciclo estacionario alrededor del nuevo nivel. Este análisis muestra cómo la *estabilidad interna* del modelo filtra o amplifica los shocks externos.

Análisis e Ideas Clave

Intuitivo Económico (Sin Números): Cuando el gobierno implementa una política de gasto público cíclico (que sube y baja regularmente), ¿cómo responden el PIB y las tasas de interés? El método de coeficientes indeterminados nos permite separar lo que pasaría si no hubiera política (la "dinámica natural"del sistema) de lo que la política realmente induce. Podemos ver si el PIB sube y baja en sincronía con el gasto, o si se retrasa. También nos dice si los "vaivenes"son más grandes o más pequeños que los del gasto. En esencia, nos ayuda a ver la "huella"de la política fiscal en la economía.
Intuitivo No Técnico (Sin Números): Imaginen que tienen un péndulo. Si solo lo sueltan, oscilará y se detendrá (solución homogénea). Pero si, además, lo empujan suavemente cada cierto tiempo (término de forzamiento), el péndulo seguirá un patrón de movimiento influenciado por esos empujones (solución particular). El método nos permite predecir ese patrón final: si oscilará más fuerte, si se moverá un poco antes o después de cada empujón. La *resonancia* sería como si empujaran el péndulo justo en su frecuencia natural, haciendo que sus oscilaciones crecieran mucho más de lo esperado.

4. Diagramas de Fase y Estabilidad de Equilibrios

Introducción

Los diagramas de fase son herramientas gráficas indispensables para el *análisis cualitativo* de sistemas dinámicos autónomos, particularmente en dos dimensiones. Permiten visualizar la evolución del sistema, la naturaleza de sus equilibrios y la estabilidad de las trayectorias sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones, ofreciendo una comprensión geométrica profunda del comportamiento dinámico.

Temas y subtemas

Esta sección introduce los *diagramas de fase* en 1D y 2D como una herramienta visual para inferir estabilidad y destinos de largo plazo. Se detallan los *pasos de construcción*, incluyendo la identificación de *equilibrios*, la determinación del *sentido del movimiento* y el uso de *nullclines*. Se clasifican los *tipos de equilibrio* como nodos, focos, puntos de silla y vórtices/centros, relacionándolos con los *autovalores* del sistema linealizado. Finalmente, se explica el concepto de *estabilidad local* de sistemas no lineales mediante *linealización* vía el Jacobiano y se presenta el *plano traza-determinante* como una herramienta de clasificación para sistemas 2x2.

4.1. Diagramas de Fase en 1D (Línea de Fase)

Para una EDO autónoma de primer orden $\dot{x} = f(x)$, el diagrama de fase en 1D (o *línea de fase*) representa la dinámica en el eje x.

Construcción y Tipos de Equilibrio

1. **Identificar equilibrios:** Resolver $f(x) = 0$ para encontrar los puntos de equilibrio x^*.
2. **Determinar sentido del movimiento:** En cada intervalo entre equilibrios, se evalúa el signo de $f(x)$:
   - Si $f(x) > 0$: la variable x crece (flecha $\rightarrow$).
   - Si $f(x) < 0$: la variable x decrece (flecha $\leftarrow$).

Los tipos de equilibrio se clasifican según el comportamiento de las flechas:

- **Estable (Atractor):** Flechas apuntan hacia x^* desde ambos lados. Criterio diferencial: $f'(x^*) < 0$.
- **Inestable (Repulsor):** Flechas salen de x^* hacia ambos lados. Criterio diferencial: $f'(x^*) > 0$.
- **Semiestable:** Flechas entran por un lado y salen por el otro (ej., $\dot{x} = x^2$ en $x = 0$).

Ejemplo Calculado: Modelo Logístico

Considere $\dot{x} = x(1 - x)$ (modelo logístico simplificado). **Paso 1: Equilibrios.** $f(x) = x(1 - x) = 0 \Rightarrow x^* = 0$ y $x^* = 1$. **Paso 2: Signo de $f(x)$.**

- Si $x \in (0, 1)$: $x > 0$ y $(1 - x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ (crece $\rightarrow$).
- Si $x < 0$ o $x > 1$: $x(1 - x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ (decrece $\leftarrow$).

Paso 3: Estabilidad (Criterio diferencial). $f'(x) = 1 - 2x$.

- En $x^* = 0$: $f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ **inestable**.
- En $x^* = 1$: $f'(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ **estable**.

Lectura: Toda trayectoria con $x(0) > 0$ converge a $x^* = 1$.

4.2. Diagramas de Fase en 2D (Retrato de Fase)

Para sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, el diagrama de fase en 2D (o *retrato de fase*) se construye en el plano (x, y).

Construcción con Nullclines

1. **Graficar las *nullclines*:** Curvas donde $\dot{x} = 0$ (nullcline-x) y $\dot{y} = 0$ (nullcline-y).
2. **Identificar equilibrios:** Los puntos de *intersección de las nullclines* son los equilibrios del sistema.
3. **Determinar la dirección del movimiento:** En cada región delimitada por las nullclines, se evalúan los signos de $\dot{x}$ y $\dot{y}$ para dibujar el campo de direcciones (flechas).
4. **Graficar trayectorias:** Se dibujan algunas trayectorias típicas que sigan el campo de direcciones.

4.3. Tipos de Equilibrio y Autovalores

La clasificación de los equilibrios en sistemas 2D está intrínsecamente ligada a los *autovalores* de la matriz Jacobiana del sistema linealizado en el punto de equilibrio.

- **Nodo:** Las trayectorias convergen (estable) o divergen (inestable) de forma no cíclica. Se da con autovalores *reales*.
  - **Nodo estable:** Autovalores reales con $\Re(\lambda_i) < 0$.
  - **Nodo inestable:** Autovalores reales con $\Re(\lambda_i) > 0$.
- **Foco:** Las trayectorias convergen (estable) o divergen (inestable) en forma cíclica (espiral). Se da con autovalores *complejos*.
  - **Foco estable:** Autovalores complejos con $\Re(\lambda_i) < 0$.
  - **Foco inestable:** Autovalores complejos con $\Re(\lambda_i) > 0$.
- **Punto de Silla:** Algunas trayectorias convergen al equilibrio, mientras que otras divergen de él. Siempre es *inestable*. Se da cuando una raíz es negativa y la otra positiva o cero.
- **Vórtice (o Centro):** Las trayectorias orbitan alrededor del equilibrio sin converger ni alejarse. Es *linealmente neutro* (o inestable). Se da con autovalores complejos puros ($\Re(\lambda_i) = 0$).

4.4. Estabilidad Local de Sistemas No Lineales (Linealización)

Para sistemas no lineales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con un equilibrio $\mathbf{x}^*$, la *estabilidad local* se analiza mediante la *linealización* del sistema alrededor del equilibrio.

Proceso y Criterio

1. **Hallar el Jacobiano:** Se calcula la matriz Jacobiana $J(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$.
2. **Evaluar en el equilibrio:** Se evalúa el Jacobiano en el punto de equilibrio $J(\mathbf{x}^*)$.
3. **Calcular autovalores:** Se encuentran los autovalores de la matriz $J(\mathbf{x}^*)$.

El criterio de estabilidad es el siguiente:

- Si todos los autovalores de $J(\mathbf{x}^*)$ tienen *parte real negativa*, el equilibrio no lineal es *asintóticamente estable*.
- Si al menos un autovalor tiene *parte real positiva*, el equilibrio es *inestable*.
- Si existe un autovalor con *parte real cero* (caso no hiperbólico), la linealización *no es concluyente*; se requieren otras técnicas.

Ejemplo Calculado: Estabilidad Local

Considere el sistema no lineal:

$$x' = xy - 2$$
$$y' = 2x - y$$

Paso 1: Encontrar los equilibrios. Hacemos $x' = 0$ y $y' = 0$:

$$xy - 2 = 0$$
$$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

Sustituyendo $y = 2x$ en la primera ecuación: $x(2x) - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Los equilibrios son $(1, 2)$ y $(-1, -2)$. **Paso 2: Calcular el Jacobiano.** $J(x, y) = \begin{pmatrix} \partial x'/\partial x & \partial x'/\partial y \\ \partial y'/\partial x & \partial y'/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. **Paso 3: Evaluar en los equilibrios y calcular autovalores.**

- En $(1,2)$: $J(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Los autovalores son $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ (una raíz positiva, otra negativa). Por lo tanto, el equilibrio es un *punto de silla*, que es *inestable*.
- En $(-1,-2)$: $J(-1,-2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Los autovalores son $\lambda = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$ (parte real negativa). Por lo tanto, el equilibrio es un *foco estable*.

4.5. Plano Traza-Determinante (para Sistemas 2x2)

Para un sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ (o su linealización) con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, se pueden clasificar los equilibrios de manera rápida usando la *traza* $\tau = \text{tr}(A)$, el *determinante* $\Delta = \det(A)$ y el *discriminante* $D = \tau^2 - 4\Delta$. La ecuación característica es $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$.

Criterios de Clasificación

- $\Delta < 0$: *Punto de Silla* (siempre inestable).
- $\Delta > 0$:
  - $D > 0$: Autovalores reales.
    - $\tau < 0$: *Nodo estable*.
    - $\tau > 0$: *Nodo inestable*.
  - $D < 0$: Autovalores complejos.
    - $\tau < 0$: *Foco estable*.
    - $\tau > 0$: *Foco inestable*.
    - $\tau = 0$: *Centro* (linealmente neutro).
- $\Delta = 0$: Casos degenerados (líneas de equilibrios o direcciones singulares).

Análisis e Ideas Clave

Intuitivo Económico (Sin Números): Imaginen que tienen un modelo que describe cómo la inflación y el desempleo interactúan. Un *diagrama de fase* es un mapa que les dice hacia dónde se moverán la inflación y el desempleo desde cualquier punto. Si el *equilibrio* es un *foco estable*, esto significa que la economía podría oscilar (quizás con "boomsz recesiones") pero con el tiempo convergerá a niveles estables de inflación y desempleo, como una espiral que se cierra. Un *punto de silla* indicaría que, si bien la economía podría acercarse al equilibrio en ciertas direcciones, cualquier pequeña desviación en otras direcciones la alejaría de forma explosiva, haciendo que el equilibrio sea muy difícil de alcanzar y mantener.
Intuitivo No Técnico (Sin Números): Piensen en un auto de carreras dando vueltas en una pista con una meta en el centro. Si el centro es un *foco estable*, el auto girará en espiral, acercándose cada vez más a la meta. Si es un *nodo estable*, el auto se dirigirá directamente a la meta sin dar vueltas. Si la meta es un *punto de silla*, el auto solo la alcanzará si viene por un camino muy específico; si se desvía un poco, se saldrá de la pista (se alejará de la meta). El *plano traza-determinante* es como un panel de control que, al mirar dos números (la traza y el determinante), les dice instantáneamente qué tipo de "meta"tienen: si es una espiral que converge, una que diverge, o un punto de no retorno.

5. Aplicaciones Económicas Clave

Introducción

Los sistemas de ecuaciones diferenciales son indispensables en economía para modelar la evolución conjunta de múltiples variables que se afectan mutuamente. Permiten analizar la dinámica de *capital y consumo*, *inflación y desempleo*, o *precios e inventarios*, proporcionando un marco riguroso para entender cómo los sistemas económicos alcanzan sus equilibrios, oscilan o se desvían de ellos a lo largo del tiempo.

Temas y subtemas

Esta sección ilustra la aplicación práctica de los SED en el análisis económico a través de modelos representativos. Se exploran la *Curva de Phillips Aumentada* y el sistema de *Brecha de Producto con Regla Monetaria*, destacando cómo los diagramas de fase y autovalores revelan *focos estables* y el concepto de *Sacrifice Ratio*. También se analiza el *modelo de Solow* para el crecimiento del capital per cápita y el *ajuste de precios (Tâtonnement)*, mostrando la convergencia a estados estacionarios. Finalmente, se aborda un *problema de consolidación* del modelo de Ramsey 2D, integrando teoría, cálculo e interpretación para clasificar su equilibrio como un punto de silla, fundamental para entender las trayectorias óptimas.

5.1. Curva de Phillips Aumentada

Este modelo clásico vincula la *tasa de inflación observada* (π) con las *expectativas de inflación* (π^e) y la *tasa de desempleo* (U). Generalmente, se formula como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

Formulación y Análisis

El sistema de la Curva de Phillips aumentada puede representarse como:

$$\dot{\pi}^e = j(\pi - \pi^e)$$
$$\dot{U} = -k(m - \pi)$$

Donde $\pi = a - T - bU + \pi^e$. Al sustituir la primera ecuación en las otras dos, se obtiene un sistema lineal 2D en (π^e, U):

$$\begin{pmatrix} \dot{\pi}^e \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -jb \\ k & -kb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^e \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j(a-T) \\ -k(m-a+T) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Análisis del Equilibrio: Las nullclines son:

- $\dot{\pi}^e = 0 \Rightarrow U = \frac{a-T}{b}$ (línea vertical).
- $\dot{U} = 0 \Rightarrow \pi^e = bU + m - a + T$ (línea creciente).

Clasificación del Equilibrio: El equilibrio de este modelo suele ser un *foco estable*. Esto significa que .[el] modelo es estable, y presenta oscilaciones al converger al equilibrio". **Implicaciones Económicas:** A largo plazo, la tasa de desempleo de equilibrio no depende de la inflación, y la tasa de inflación de equilibrio solo depende del crecimiento del stock nominal de dinero. Esto refleja la *neutralidad del dinero* en el largo plazo y distingue a la curva de Phillips cuando se ajusta por expectativas.

Análisis e Ideas Clave

Intuitivo Económico (Sin Números): Imaginen que el Banco Central intenta controlar la inflación y el desempleo. La Curva de Phillips Aumentada nos dice que, si el Banco Central inyecta dinero en la economía, inicialmente el desempleo puede bajar y la inflación subir. Pero si la gente *espera* que la inflación suba, exigirá salarios más altos, y el desempleo regresará a su nivel "natural", mientras que la inflación se mantendrá más alta. El diagrama de fase nos mostraría una *espiral* donde la economía oscila: la inflación sube y baja, el desempleo también, pero con el tiempo, ambas variables se asientan en sus niveles de equilibrio de largo plazo, independientemente de las expectativas iniciales.
Intuitivo No Técnico (Sin Números): Piensen en un automóvil que, al intentar corregir su rumbo, "sobrevira.º "subvira", es decir, gira más o menos de lo necesario. La Curva de Phillips, con expectativas adaptativas, es como un sistema de dirección que, aunque inestable en el corto plazo, eventualmente corrige el rumbo. Las *oscilaciones* serían esos "sobrerrechazos.º "subrreacciones"del sistema hasta que finalmente se estabiliza. La *estabilidad* es el auto llegando a su destino, aunque haya dado unas cuantas "volantadas.[en] el camino.

5.2. Brecha de Producto y Dinámica de Inflación (IS + Regla Monetaria)

Este sistema es estándar en la macroeconomía lineal y relaciona la *desviación de la inflación respecto a la meta* (z) con la *brecha de producto* (x, la diferencia entre la producción real y la potencial).

Formulación y Estabilidad

El sistema se formula como:

$$\begin{cases} \dot{z} = \kappa x \\ \dot{x} = -ax - bz \end{cases} \tag{17}$$

Donde $\kappa > 0$ es la pendiente de la curva de Phillips, $a = \sigma\phi_x + \lambda$ (amortiguación real) y $b = \sigma\phi_\pi$ ("dureza.ªntiinflacionaria). La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -b & -a \end{pmatrix}$. **Equilibrio:** $(z^*, x^*) = (0, 0)$, lo que implica que la inflación está en su meta ($\pi = \pi^*$) y la producción en su potencial ($x = 0$). **Estabilidad:** El polinomio característico es $r^2 + ar + \kappa b = 0$. Dado que $a, \kappa b > 0$, la traza $\tau = -a < 0$ y el determinante $\Delta = \kappa b > 0$, lo que garantiza *estabilidad local asintótica*. El tipo de convergencia depende del discriminante $D = a^2 - 4\kappa b$:

- $D > 0$: *Nodo estable* (convergencia monótona).
- $D < 0$: *Foco estable* (espiral amortiguada, oscilaciones).

Sacrifice Ratio

Una identidad crucial derivada de este modelo es el *Sacrifice Ratio*, que cuantifica el costo acumulado de la brecha de producto negativa para reducir la inflación inicial a la meta:

$$\int_0^\infty x(t)\, dt = -\frac{z(0)}{\kappa} \tag{18}$$

Interpretación: .ºel área acumulada de brechas negativas (pérdida de producto respecto del potencial) requerida para bajar la inflación inicial $z(0) > 0$ hasta la meta es proporcional a $z(0)$ e inversamente proporcional a κ".

Análisis e Ideas Clave

Intuitivo Económico (Sin Números): Cuando la inflación está por encima de la meta, el Banco Central reacciona subiendo las tasas de interés. Esto reduce la demanda y, por ende, el crecimiento económico (brecha de producto negativa). Esta brecha, a su vez, ayuda a bajar la inflación. El sistema nos muestra cómo esta "danza.ºentre inflación y producto se desarrolla. Un *foco estable* significaría que la economía oscila entre períodos de bajo crecimiento e inflación decreciente, y luego quizás un rebote de crecimiento con un pequeño repunte inflacionario, hasta que finalmente se asienta en la meta de inflación con la producción a su potencial. El *Sacrifice Ratio* es el çosto.ºen términos de pérdida de producción que hay que pagar para reducir la inflación.
Intuitivo No Técnico (Sin Números): Piensen en un termostato inteligente que controla la temperatura de una habitación (inflación). Si la temperatura sube demasiado, el termostato enciende el aire acondicionado (política monetaria), lo que enfría la habitación pero también reduce el "flujo de aire"(brecha de producto). Este proceso hace que la temperatura baje. Un *foco estable* sería como un termostato que, al corregir, hace que la temperatura baje demasiado, luego suba un poco, y así sucesivamente, con oscilaciones cada vez más pequeñas hasta llegar a la temperatura deseada. El çosto"de este proceso sería el tiempo que la habitación pasó más fría de lo necesario para corregir la subida inicial.

5.3. Modelo de Solow (Capital per cápita)

El modelo de Solow es fundamental para entender la *dinámica del crecimiento económico* a largo plazo, describiendo la evolución del *capital per cápita* (k).

Formulación y Estabilidad

La ecuación diferencial es:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k \tag{19}$$

Donde s es la tasa de ahorro, $f(k)$ es la función de producción per cápita, n es la tasa de crecimiento poblacional y δ es la tasa de depreciación del capital. **Equilibrio (estado estacionario):**

$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ si $f(k) = Ak^\alpha$. **Estabilidad:** El diagrama de fase 1D de este modelo muestra un equilibrio k^* que es "globalmente estable para $k > 0$". **Implicaciones:** Las economías tienden a converger a un *estado estacionario de capital*, donde el capital per cápita y la producción per cápita ya no crecen.

Análisis e Ideas Clave

Intuitivo Económico (Sin Números): Imaginen un país que acumula capital (máquinas, infraestructura) para producir bienes. El modelo de Solow nos dice que, si el país ahorra lo suficiente, su capital per cápita crecerá, pero solo hasta un *límite* (el estado estacionario). Si tienen poco capital, ahorrarán e invertirán, y su capital crecerá. Si tienen demasiado capital, la depreciación y el crecimiento poblacional lo harán disminuir. El diagrama de fase 1D muestra cómo todas las economías, independientemente de su punto de partida, convergen a este nivel de capital sostenible a largo plazo.
Intuitivo No Técnico (Sin Números): Piensen en una bañera que se está llenando (capital acumulándose). El grifo es el ahorro y el desagüe es la depreciación y el aumento de la población. No importa qué tan llena esté la bañera inicialmente, si el grifo y el desagüe tienen un tamaño fijo, el nivel de agua eventualmente se estabilizará en un punto donde lo que entra es igual a lo que sale. Ese nivel de agua estable es el *estado estacionario* del capital.

5.4. Ajuste de Precios (Tâtonnement)

Este modelo describe cómo los precios se ajustan en un mercado en respuesta al *exceso de demanda*.

Formulación y Estabilidad

La ecuación diferencial es:

$$\dot{p} = \alpha[D(p) - S(p)] \tag{20}$$

Donde $\alpha > 0$ es un parámetro de velocidad de ajuste, $D(p)$ es la demanda y $S(p)$ es la oferta. **Equilibrio:** $p^* = \frac{a-c}{b+d}$ para funciones de oferta y demanda lineales $D(p) = a - bp, S(p) = c + dp$. **Estabilidad:** El diagrama de fase 1D de estos modelos muestra una çonvergencia monótona"hacia el precio de equilibrio. Si hay exceso de demanda ($\dot{p} > 0$), el precio sube; si hay exceso de oferta ($\dot{p} < 0$), el precio baja. **Implicaciones:** El mercado siempre tiende a un *precio de equilibrio* siempre que el mecanismo de ajuste sea suficiente.

Análisis e Ideas Clave

Intuitivo Económico (Sin Números): Imaginen que hay un mercado de pescado. Si hay mucha gente queriendo comprar pescado y pocos vendedores (exceso de demanda), los precios subirán. Si hay mucho pescado y pocos compradores (exceso de oferta), los precios bajarán. El modelo de Tâtonnement nos dice que este proceso continuará hasta que la cantidad demandada sea igual a la cantidad ofrecida, alcanzando un *precio de equilibrio*. La velocidad de ajuste α nos diría qué tan rápido el precio reacciona a los desequilibrios.
Intuitivo No Técnico (Sin Números): Piensen en una balanza con dos platillos. Si un lado tiene más peso (exceso de demanda), la balanza se inclina, y para equilibrarla, se ajusta el peso en el otro lado (el precio sube). Este "tanteoçontinúa hasta que la balanza está nivelada (equilibrio). La çonvergencia monótona"significa que el precio se mueve en una sola dirección hacia el equilibrio, sin oscilar ni "pasarse de largo"por el punto justo.

5.5. Problema de Consolidación: Crecimiento de Ramsey 2D (con solución guiada)

Teoría: El modelo de Ramsey 2D describe la dinámica conjunta del *capital per cápita* (k) y el *consumo per cápita* (c) en una economía de crecimiento óptimo. El análisis del Jacobiano en el equilibrio revela que es un *punto de silla*. Esto implica la existencia de una *trayectoria estable única* (el çamino de silla.º *saddle path*) que lleva al equilibrio; cualquier desviación de esta trayectoria implica una divergencia del sistema, lo que es crucial para la política de consumo óptima.
Modelo (sin crecimiento poblacional, $n = 0$):

$$\dot{k} = Ak^\alpha - c - \delta k$$

$$\dot{c} = \frac{1}{\theta}(\alpha A k^{\alpha-1} - \rho)c$$

Donde $A, \alpha, \delta, \rho, \theta > 0$, y $0 < \alpha < 1$.
Cálculo escalonado: Paso 1: Encontrar el equilibrio (k^*, c^*)**.** Hacemos $\dot{k} = 0$ y $\dot{c} = 0$. De $\dot{c} = 0$: $\frac{1}{\theta}(\alpha A k^{\alpha-1} - \rho)c = 0$. Como $c > 0$ en equilibrio:

$$\alpha A k^{\alpha-1} - \rho = 0 \Rightarrow \alpha A k^{\alpha-1} = \rho \Rightarrow (k^*)^{\alpha-1} = \frac{\rho}{\alpha A}$$

Como $\alpha - 1 < 0$, tomamos la potencia $\frac{1}{\alpha-1}$:

$$k^* = \left(\frac{\rho}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{\alpha A}{\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{21}$$

De $\dot{k} = 0$: $Ak^\alpha - c - \delta k = 0 \Rightarrow c^* = Ak^\alpha - \delta k^*$.
Paso 2: Calcular el Jacobiano $Df(k, c)$ **y evaluarlo en** (k^*, c^*)**.** Las funciones son $f_1(k, c) = Ak^\alpha - c - \delta k$ y $f_2(k, c) = \frac{1}{\theta}(\alpha A k^{\alpha-1} - \rho)c$.

$$Df(k, c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k} & \frac{\partial f_1}{\partial c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial k} & \frac{\partial f_2}{\partial c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A k^{\alpha-1} - \delta & -1 \\ \frac{1}{\theta}\alpha(\alpha-1)Ak^{\alpha-2}c & \frac{1}{\theta}(\alpha A k^{\alpha-1} - \rho) \end{pmatrix} \tag{22}$$

Evaluamos en (k^*, c^*), usando $\alpha A k^{\alpha-1} = \rho$ del equilibrio:

$$A^* = Df(k^*, c^*) = \begin{pmatrix} \rho - \delta & -1 \\ \frac{1}{\theta}\alpha(\alpha-1)A(k^*)^{\alpha-2}c^* & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Paso 3: Analizar la estabilidad mediante la traza y el determinante de A^***.**

- **Traza** (τ)**:** $\tau = \mathrm{tr}(A^*) = (\rho - \delta) + 0 = \rho - \delta$. El signo es ambiguo, depende de los parámetros.
- **Determinante** (Δ)**:** $\Delta = \det(A^*) = (\rho - \delta)(0) - (-1)\left(\frac{1}{\theta}\alpha(\alpha-1)A(k^*)^{\alpha-2}c^*\right)$.

$$\Delta = \frac{1}{\theta}\alpha(\alpha-1)A(k^*)^{\alpha-2}c^*$$

  Sabemos que θ, α, A, c^* son positivos. Como $0 < \alpha < 1$, entonces $(\alpha - 1) < 0$. Por lo tanto, $\Delta < 0$.

Clasificación del Equilibrio: Dado que el determinante $\Delta < 0$, el equilibrio es un *punto de silla*.
Interpretación:

- La clasificación como *punto de silla* implica que el equilibrio (k^*, c^*) es inestable. Sin embargo, existe una *trayectoria única* (el *saddle path* o *sendero de silla*) que converge a este equilibrio.
- Fuera de esta trayectoria, las variables c o k divergen (e.g., el consumo puede caer a cero o el capital crecer infinitamente).
- La *política óptima* en el modelo de Ramsey consiste en elegir una condición inicial de consumo $c(0)$ tal que la economía se sitúe exactamente sobre este sendero de silla, asegurando la convergencia al equilibrio de estado estacionario. Este resultado subraya la importancia de las condiciones iniciales y la coordinación política para lograr resultados económicos deseados.

Red Conceptual: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

- **Resumen breve y categorizado**
  - **Fundamentos de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales (SED):** Definición, notación, tipos (autónomos, no autónomos, lineales, no lineales), vector de estado. Se destaca la equivalencia entre EDO de orden m y sistemas de m ecuaciones de primer orden, unificando el análisis. Estos sistemas son cruciales para modelar fenómenos acoplados en economía, como la interacción entre producción y tasa de interés, o inflación y desempleo.
  - **Resolución de Sistemas Lineales Homogéneos:** Métodos basados en autovalores y autovectores. Cubre casos con matrices diagonalizables, autovalores complejos (generando soluciones oscilatorias) y casos no diagonalizables (con autovalores repetidos y defecto, que involucran términos polinomiales en el tiempo).
  - **Resolución de Sistemas Lineales No Homogéneos:** Se utiliza el método de coeficientes indeterminados, aplicable cuando el término de forzamiento ($\mathbf{h}(t)$) es una combinación de funciones Polinomio-Exponencial-Trigonométricas (PET). Incluye el manejo de la resonancia", donde el forzamiento coincide con una solución homogénea.
  - **Análisis Cualitativo y Estabilidad de Equilibrios:** Herramientas gráficas como los diagramas de fase (en 1D y 2D) permiten entender el comportamiento del sistema sin resolverlo explícitamente. Se clasifican los tipos de equilibrio (nodos, focos, puntos de silla, vórtices/centros) y se analiza la estabilidad local mediante la linealización del sistema alrededor de los equilibrios y el análisis de los autovalores de la matriz Jacobiana (o el plano traza-determinante para sistemas 2x2).
  - **Aplicaciones Económicas Clave:** El marco de los SED se aplica a modelos como la Curva de Phillips Aumentada (inflación y desempleo), la dinámica de la brecha de producto e inflación (con reglas monetarias), el modelo de Solow (crecimiento de capital per cápita), modelos de ajuste de precios (tâtonnement) y dinámicas de expectativas adaptativas.
- **Conceptos principales**
  - **Sistema de Ecuaciones Diferenciales (SED):** Conjunto de ecuaciones que describen la evolución conjunta de varias funciones desconocidas con el tiempo.
  - **Vector de Estado ($\mathbf{x}(t)$):** Vector de variables endógenas que describen el estado del sistema en el tiempo.
  - **Sistema Autónomo:** Sistema cuya ley de movimiento no depende explícitamente del tiempo.
  - **Sistema Lineal Homogéneo:** Sistema de la forma $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de coeficientes constante.
  - **Sistema Lineal No Homogéneo:** Sistema de la forma $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$, donde $\mathbf{h}(t)$ es un término de forzamiento externo.
  - **Equilibrio ($\mathbf{x}$):** Punto donde la tasa de cambio de todas las variables es cero ($\mathbf{f}(\mathbf{x}^{)=\mathbf{0}}$).
  - **Estabilidad:** Propiedad de un equilibrio donde las trayectorias cercanas a él permanecen cerca (estable de Lyapunov) o convergen hacia él (asintóticamente estable).
  - **Autovalores (λ_i) y Autovectores ($\mathbf{v}_i$):** Valores y vectores propios de la matriz A que determinan las tasas de crecimiento/decaimiento y las direcciones de la dinámica del sistema.
  - **Diagonalización:** Proceso de transformar una matriz A en una matriz diagonal Λ utilizando una base de autovectores, lo que simplifica la resolución de sistemas lineales homogéneos al desacoplarlos.
  - **Exponencial de Matriz (e^{At}):** La solución fundamental para sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes.
  - **Diagrama de Fase:** Representación gráfica de las trayectorias en el espacio de estados, mostrando el campo de direcciones y los equilibrios.
  - **Nullclines (Isoclinas):** Curvas en el diagrama de fase donde al menos una de las derivadas de las variables de estado es cero ($\dot{x}_i = 0$).

- **Tipos de Equilibrio (2D):** Nodo (estable/inestable), Foco (estable/inestable), Punto de Silla, Vórtice (Centro).
- **Linealización:** Aproximación de un sistema no lineal por un sistema lineal en torno a un equilibrio, utilizando la matriz Jacobiana.
- **Jacobiano ($J(\mathbf{x})$ o $Df(x)$):** Matriz de derivadas parciales de un sistema no lineal, utilizada en la linealización para analizar la estabilidad local.
- **Método de Coeficientes Indeterminados:** Técnica para encontrar soluciones particulares de sistemas no homogéneos cuando el término de forzamiento es PET.
- **Funciones PET:** Clase de funciones (polinomiales, exponenciales, trigonométricas) que pueden ser manejadas por el método de coeficientes indeterminados.
- **Resonancia:** Condición que ocurre cuando el término de forzamiento de un sistema no homogéneo comparte una forma funcional con una solución del sistema homogéneo asociado, requiriendo una modificación del ansatz.
- **Plano Traza-Determinante:** Herramienta para clasificar rápidamente los equilibrios en sistemas lineales 2x2 basada en la traza y el determinante de la matriz del sistema.

▪ **Axiomas/postulados (si aplica)**

- **Teorema de Existencia y Unicidad (Picard-Lindelöf):** Si la función $\mathbf{f}$ es continua en t y localmente Lipschitz en $\mathbf{x}$, entonces el problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ tiene una única solución local. Este es un postulado fundamental para la validez de los modelos dinámicos.
- **Principio de Superposición (para sistemas lineales):** La solución general de un sistema lineal no homogéneo es la suma de la solución del sistema homogéneo asociado y una solución particular.
- **Principio de Estabilidad Hiperbólica:** La estabilidad local de un equilibrio de un sistema no lineal es la misma que la del sistema linealizado en torno a ese equilibrio, siempre que ninguno de los autovalores del Jacobiano tenga parte real nula (equilibrios hiperbólicos).

▪ **Relaciones y aplicaciones clave**

- **Equivalencia EDO de orden m y sistemas de m EDO de primer orden:** Esta relación es fundamental, ya que permite aplicar las mismas herramientas de álgebra lineal (autovalores, autovectores, matrices) y de análisis (diagramas de fase, estabilidad) a EDO de cualquier orden.
- **Autovalores y Estabilidad:** La parte real de los autovalores de la matriz del sistema (o de su linealización) es el principal determinante de la estabilidad del equilibrio:
  - Partes reales negativas: Convergencia (Nodos o Focos Estables).
  - Partes reales positivas: Divergencia (Nodos o Focos Inestables).
  - Una parte real negativa y otra positiva/cero (en 2D): Punto de Silla (inestable).
  - Partes reales nulas (y el resto negativas): Linealización no concluyente o Centro/Vórtice (linealmente neutro).
- **Autovalores y Forma de la Solución:**
  - Autovalores complejos: Inducen oscilaciones (senos y cosenos) en la dinámica del sistema (focos).
  - Autovalores repetidos con defecto (no diagonalizables): Introducen términos polinomiales en t multiplicando las exponenciales (ej., $te^{\lambda t}$), reflejando una ïnercia.º .ªrrastre.ªdicional en el ajuste.
- **Solución particular y Shocks Externos:** En sistemas no homogéneos, la solución particular $\mathbf{x}_p(t)$ describe la respuesta "forzada"del sistema a shocks externos. Esto permite cuantificar el impacto a largo plazo de políticas o perturbaciones (fiscales, monetarias, estacionales), mientras que la solución homogénea $\mathbf{x}_h(t)$ describe la dinámica transitoria.
- **Aplicaciones Económicas Específicas:**

- **Curva de Phillips Aumentada:** Modeliza la interacción entre inflación, desempleo y expectativas, mostrando convergencia a equilibrios estables con posibles oscilaciones, y la neutralidad monetaria a largo plazo.
- **Brecha de Producto y Dinámica de Inflación:** Utiliza un sistema 2D para analizar cómo la brecha de producto y la inflación convergen a su equilibrio bajo una regla monetaria, cuantificando el "sacrifice ratio"para desinflaciones.
- **Modelo de Solow:** El diagrama de fase explica la convergencia del capital per cápita a un estado estacionario estable.
- **Ajuste de Precios (Tâtonnement):** Describe la convergencia monótona del precio de mercado al equilibrio competitivo, impulsado por el exceso de demanda u oferta.
- **Modelos IS-LM/MP:** Permiten analizar la estabilidad del ingreso y la tasa de interés ante diferentes políticas y shocks.

- **Secuencia lógica desarrollada del cálculo del tema**

1. **Para Sistemas Homogéneos Lineales ($\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$):**
   a) **Conversión (si aplica):** Si el problema original es una EDO de orden superior, convertirlo a un sistema de m ecuaciones de primer orden definiendo variables auxiliares.
   b) **Autovalores:** Calcular los autovalores (λ_i) de la matriz A resolviendo el polinomio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.
   c) **Autovectores:** Encontrar los autovectores ($\mathbf{v}_i$) asociados a cada autovalor resolviendo $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
   d) **Construcción de la Solución General:**
   - **Caso Diagonalizable (autovalores reales distintos):** $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$.
   - **Caso Autovalores Complejos Conjugados ($\alpha \pm i\beta$):** A partir del autovector complejo $\mathbf{z} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, construir soluciones reales linealmente independientes como $\mathbf{x}_1(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{v}\cos\beta t - \mathbf{w}\sin\beta t)$ y $\mathbf{x}_2(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{v}\sin\beta t + \mathbf{w}\cos\beta t)$. La solución general es una combinación lineal de estas.
   - **Caso No Diagonalizable (autovalores repetidos con defecto):** Construir cadenas de Jordan de autovectores generalizados para obtener soluciones que incluyen términos polinomiales en t, como $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$, etc.

   e) **Condiciones Iniciales:** Si se proporcionan, usar las condiciones iniciales para determinar las constantes C_i.
2. **Para Sistemas No Homogéneos Lineales ($\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$):**
   a) **Solución Homogénea:** Resolver el sistema homogéneo asociado ($\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$) siguiendo los pasos anteriores para obtener $\mathbf{x}_h(t)$.
   b) **Identificación del Forzamiento:** Determinar la forma PET del término de forzamiento $\mathbf{h}(t)$.
   c) **Propuesta de Ansatz:** Proponer una solución particular $\mathbf{x}_p(t)$ con la misma estructura funcional que $\mathbf{h}(t)$, utilizando vectores de coeficientes desconocidos.
   d) **Verificación de Resonancia:** Comprobar si el ansatz propuesto ya es una solución del homogéneo. Si es así (ej., el exponente α del forzante $e^{\alpha t}$ es un autovalor de A), multiplicar el ansatz por la potencia mínima de t (t^s) necesaria para romper la dependencia lineal.
   e) **Sustitución y Derivación:** Derivar $\mathbf{x}_p(t)$ y sustituirla en la ecuación no homogénea $\dot{\mathbf{x}}_p = A\mathbf{x}_p + \mathbf{h}(t)$.
   f) **Igualación de Coeficientes:** Igualar los coeficientes de las funciones linealmente independientes resultantes de ambos lados de la ecuación para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas para los coeficientes desconocidos.
   g) **Resolución del Sistema Lineal:** Resolver el sistema algebraico para encontrar los valores de los coeficientes indeterminados.
   h) **Formación de la Solución Particular:** Construir $\mathbf{x}_p(t)$ con los coeficientes obtenidos.
   i) **Solución General:** La solución total es la suma de la solución homogénea y la particular: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t)$.

j) **Condiciones Iniciales:** Si se proporcionan, aplicarlas para determinar las constantes de la solución homogénea.

3. **Para Análisis Cualitativo y Estabilidad (Sistemas 2D o Linealizados):**

a) **Puntos de Equilibrio:** Encontrar los puntos de equilibrio resolviendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

b) **Linealización (si aplica):** Si el sistema es no lineal, linealizarlo alrededor de cada equilibrio calculando la matriz Jacobiana $J(\mathbf{x}^*)$. Si es lineal, usar la matriz A directamente.

c) **Autovalores:** Calcular los autovalores de la matriz A (o $J(\mathbf{x}^*)$).

d) **Clasificación del Equilibrio y Estabilidad:** Usar la parte real de los autovalores para clasificar el tipo de equilibrio (nodo, foco, silla, centro/vórtice) y su estabilidad (estable, inestable, linealmente neutro). Para sistemas 2x2, el plano traza-determinante es una herramienta eficiente.

e) **Diagrama de Fase (para 2D):**

- Graficar las nullclines ($\dot{x}_i = 0$).
- Marcar los puntos de equilibrio.
- Determinar el campo de direcciones en cada región delimitada por las nullclines.
- Dibujar trayectorias representativas para visualizar la dinámica cualitativa.

Ecuaciones en Diferencia

@toobaziti

Disclaimer: Este documento se ha elaborado a partir de la grabación de una clase, la presentación visual consultada y/o el material bibliográfico recomendado. Dada la naturaleza de su composición, podría contener imprecisiones u omisiones derivadas de la calidad del audio, interrupciones involuntarias o errores de redacción. Se recomienda siempre consultar la grabación o fuente original correspondiente para confirmar cualquier detalle en caso de duda.

Índice

1. Conceptos Fundamentales de Ecuaciones en Diferencias **1**
- 1.1. Definiciones Clave y Operadores . . . 1
- 1.2. Clasificación de las Ecuaciones en Diferencias . . . 1
- 1.3. Análisis e Ideas Clave . . . 2

2. Solución de Ecuaciones Lineales Homogéneas **2**
- 2.1. El Método de la Ecuación Característica . . . 2
- 2.2. Casos Según las Raíces . . . 2
  - 2.2.1. Caso 1: Raíces Reales y Distintas ($r_1 \neq r_2$) . . . 3
  - 2.2.2. Caso 2: Raíces Reales e Iguales ($r_1 = r_2 = r$) . . . 3
  - 2.2.3. Caso 3: Raíces Complejas Conjugadas ($r = \alpha \pm \beta i$) . . . 3
- 2.3. Análisis e Ideas Clave . . . 4

3. Solución de Ecuaciones Lineales Completas (No Homogéneas) **4**
- 3.1. Principio de Superposición y el Método de Coeficientes Indeterminados . . . 4
- 3.2. Reglas de Ensayo y la Regla de Modificación . . . 5
- 3.3. Análisis e Ideas Clave . . . 6

4. Análisis de Estabilidad y el Diagrama de Fase **6**
- 4.1. Criterio de Estabilidad . . . 6
- 4.2. El Diagrama de Fase . . . 6
- 4.3. Análisis e Ideas Clave . . . 8

1. Conceptos Fundamentales de Ecuaciones en Diferencias

Introducción

Las ecuaciones en diferencias son la herramienta matemática para modelar sistemas dinámicos que evolucionan en **tiempo discreto**. A diferencia del tiempo continuo, donde las variables cambian instantáneamente, aquí los cambios ocurren en intervalos fijos (días, meses, años), reflejando la naturaleza de muchos procesos económicos y financieros.

Temas y Subtemas

Esta sección introduce el vocabulario y los conceptos básicos. Se define formalmente una **ecuación en diferencias** y se presentan los operadores clave: el **operador de desplazamiento (E)** y el **operador diferencia ()**, que es el análogo discreto de la derivada. Se establece una jerarquía para clasificar las ecuaciones según su **orden**, que indica la "memoria"del sistema; su **linealidad**, que determina la aplicabilidad de métodos de solución estándar; el tipo de **coeficientes** (constantes o variables); y si son **homogéneas** (sin término externo) o **completas**. Esta clasificación es esencial para elegir el método de resolución adecuado y comprender la estructura del modelo.

1.1. Definiciones Clave y Operadores

Definiciones
Una **ecuación en diferencias** es una relación funcional que vincula el valor de una variable y en un período t con sus valores en otros períodos. Su forma general es:

$$F(t, y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+k}) = 0 \tag{1}$$

El **orden** de la ecuación es la diferencia entre el mayor y el menor subíndice de tiempo, es decir, indica cuántos valores pasados determinan el valor futuro.
Para analizar estas ecuaciones, se utilizan los siguientes operadores:

- **Operador Diferencia (Δ):** Es el análogo discreto de la derivada y mide el cambio de un período al siguiente. La primera diferencia se define como:

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t \tag{2}$$

- **Operador Desplazamiento (E):** Avanza la secuencia un período en el tiempo.

$$E y_t = y_{t+1} \tag{3}$$

Estos operadores se relacionan algebraicamente a través del **operador identidad (I)**, donde $I y_t = y_t$, mediante la fórmula $\Delta = E - I$.

1.2. Clasificación de las Ecuaciones en Diferencias

Las ecuaciones en diferencias se clasifican según las siguientes propiedades:

- **Linealidad:** Una ecuación es **lineal** si la variable incógnita y_t y sus desplazamientos aparecen elevados a la primera potencia y no se multiplican entre sí.
- **Homogeneidad:** Una ecuación lineal es **homogénea** si todos sus términos involucran a la variable y_t o sus desplazamientos. Si existe un término independiente (una función de t o una constante), se denomina **completa** o **no homogénea**.
- **Coeficientes:** Si los factores que multiplican a y_t y sus desplazamientos no dependen del tiempo t, la ecuación es de **coeficientes constantes**.

1.3. Análisis e Ideas Clave

Análisis e Ideas Clave
La distinción entre tiempo discreto y continuo es fundamental. El tiempo continuo es como una rampa, donde el cambio es suave y constante. El tiempo discreto es como una escalera: se avanza en saltos definidos.
Ejemplo intuitivo económico: Pensemos en el inventario de una tienda. En un modelo de tiempo continuo, cada venta individual cambia el nivel de inventario al instante. En un modelo de tiempo discreto, la gerencia podría revisar el inventario y hacer pedidos solo al final de cada día. La ecuación que describe cómo el inventario de mañana depende del de hoy y de las ventas diarias es una ecuación en diferencias. Este enfoque es más realista para muchas decisiones de negocio que se toman periódicamente.

2. Solución de Ecuaciones Lineales Homogéneas

Introducción

La resolución de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes es la base del análisis dinámico. El método se centra en transformar la ecuación recursiva en un problema algebraico simple, cuya solución revela la naturaleza intrínseca del sistema: si tiende a un estado estable, si crece indefinidamente o si oscila.

Temas y Subtemas

El procedimiento central es el uso de una solución de prueba o *ansatz* de la forma $y_t = r^t$. Al sustituirla en la ecuación, se obtiene un polinomio llamado **ecuación característica**. Las raíces de este polinomio, conocidas como **raíces características**, determinan completamente la forma de la solución general. Analizaremos los tres casos posibles para estas raíces:

1. **Raíces reales y distintas**, que generan trayectorias exponenciales puras.
2. **Raíces reales e iguales**, que introducen un componente lineal en el tiempo (t) para asegurar la independencia de las soluciones.
3. **Raíces complejas conjugadas**, que producen trayectorias oscilatorias, un fenómeno clave en los modelos de ciclos económicos.

2.1. El Método de la Ecuación Característica

Definiciones
Para resolver una ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes como:

$$a_0 y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_n y_t = 0 \tag{4}$$

Se propone una solución de prueba (o *guess*) de la forma $y_t = Cr^t$. Al sustituir esta forma en la ecuación y simplificar, se obtiene la **ecuación característica**:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{5}$$

Las soluciones (raíces) de este polinomio determinan el comportamiento dinámico de y_t. La solución general es una combinación lineal de los términos asociados a cada raíz.

2.2. Casos Según las Raíces

Fórmulas y Procesos
Dependiendo de la naturaleza de las raíces de la ecuación característica, la solución general y_t toma diferentes formas. A continuación se presentan los casos para una ecuación de segundo orden $ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = 0$ con ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$.

2.2.1. Caso 1: Raíces Reales y Distintas ($r_1 \neq r_2$)

La solución general es una combinación lineal de dos términos exponenciales.

$$y_t = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t \tag{6}$$

Aplicación Práctica 1: Resolver $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$.

- **Paso 1 (Ecuación Característica):** Proponemos $y_t = r^t$, lo que nos da la ecuación $r^2 - 5r + 6 = 0$.
- **Paso 2 (Encontrar las Raíces):** Factorizando, obtenemos $(r-2)(r-3) = 0$. Las raíces son $\mathbf{r_1 = 2}$ y $\mathbf{r_2 = 3}$. Son reales y distintas.
- **Paso 3 (Solución General):** Usando la fórmula del Caso 1, la solución general es:

$$y_t = C_1(2)^t + C_2(3)^t \tag{7}$$

  donde C_1 y C_2 se determinan con condiciones iniciales.

2.2.2. Caso 2: Raíces Reales e Iguales ($r_1 = r_2 = r$)

Para asegurar que las dos partes de la solución sean linealmente independientes, se introduce un factor t.

$$y_t = (C_1 + C_2 t)r^t = C_1 r^t + C_2 t r^t \tag{8}$$

2.2.3. Caso 3: Raíces Complejas Conjugadas ($r = \alpha \pm \beta i$)

Las raíces complejas siempre aparecen en pares conjugados si los coeficientes de la ecuación son reales. La solución se expresa de forma más intuitiva usando funciones trigonométricas.

$$y_t = \rho^t(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \tag{9}$$

donde $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ es el **módulo** (que controla la amplitud de las oscilaciones) y $\omega = \arctan(\beta/\alpha)$ es el **argumento** (que controla la frecuencia).
Aplicación Práctica 2: Resolver $y_{t+2} + y_t = 0$.

- **Paso 1 (Ecuación Característica):** La ecuación es $r^2 + 1 = 0$.
- **Paso 2 (Encontrar las Raíces):** Las raíces son $\mathbf{r = \pm\sqrt{-1} = \pm i}$. Esto corresponde a $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.
- **Paso 3 (Calcular Módulo y Argumento):**
  - Módulo: $\rho = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.
  - Argumento: $\omega = \arctan(1/0) = \pi/2$.
- **Paso 4 (Solución General):** Usando la fórmula del Caso 3:

$$y_t = 1^t \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \tag{10}$$

  Esta solución describe una oscilación de amplitud constante.

Problema de Consolidación

Enunciado: Encuentre la solución particular para la ecuación $y_{t+2} + 4y_{t+1} - 5y_t = 0$ con las condiciones iniciales $y_0 = 4$ y $y_1 = -4$.
Solución Escalonada:

1. **Teoría (Identificar el caso):** La ecuación es lineal, homogénea, de segundo orden y con coeficientes constantes. Debemos encontrar las raíces de su ecuación característica.

$$r^2 + 4r - 5 = 0 \tag{11}$$

2. **Cálculo (Resolver y hallar la solución general):** Factorizando, obtenemos $(r+5)(r-1)=0$. Las raíces son $\mathbf{r_1 = 1}$ y $\mathbf{r_2 = -5}$. Son reales y distintas (Caso 1). La solución general es:
$$y_t = C_1(1)^t + C_2(-5)^t = C_1 + C_2(-5)^t \tag{12}$$

3. **Cálculo (Aplicar condiciones iniciales):** Usamos y_0 y y_1 para crear un sistema de ecuaciones para C_1 y C_2.
$$\text{Para } t=0: \quad y_0 = C_1 + C_2(-5)^0 \quad \Rightarrow \quad 4 = C_1 + C_2 \tag{13}$$
$$\text{Para } t=1: \quad y_1 = C_1 + C_2(-5)^1 \quad \Rightarrow \quad -4 = C_1 - 5C_2 \tag{14}$$
Restando la segunda ecuación de la primera: $4-(-4) = (C_1+C_2)-(C_1-5C_2) \Rightarrow 8 = 6C_2 \Rightarrow \mathbf{C_2 = 4/3}$. Sustituyendo C_2 en la primera ecuación: $4 = C_1 + 4/3 \Rightarrow \mathbf{C_1 = 8/3}$.

4. **Interpretación (Solución final y su significado):** La solución particular es:
$$y_t = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}(-5)^t \tag{15}$$
La trayectoria tiene un componente constante (8/3) y un componente oscilatorio y divergente, ya que la raíz -5 es negativa y su módulo es mayor que 1.

2.3. Análisis e Ideas Clave

Análisis e Ideas Clave
Las raíces características son el .ªDN"de la dinámica del sistema. Determinan si la variable crecerá, decaerá o fluctuará.
Ejemplo intuitivo económico: Piense en el efecto de un gasto gubernamental en la economía. Una raíz real mayor que 1 es como un .efecto multiplicador"que se expande sin control en cada período. Una raíz real entre 0 y 1 es un efecto que se disipa gradualmente, como el impacto de un estímulo que se desvanece con el tiempo. Una raíz negativa genera un ciclo de .ªuge y caída": un estímulo hoy causa una contracción mañana, seguida de un pequeño auge, y así sucesivamente, hasta que el efecto se estabiliza o explota.

3. Solución de Ecuaciones Lineales Completas (No Homogéneas)

Introducción

Cuando una ecuación en diferencias incluye un término independiente $h(t)$, el sistema está siendo influenciado por una fuerza externa. La solución general de estas ecuaciones no homogéneas se construye sobre la solución homogénea, añadiendo una respuesta específica a dicha fuerza externa.

Temas y Subtemas

El principio de superposición establece que la solución general es la suma de la **función complementaria (y_h)**, que es la solución de la parte homogénea, y una **solución particular (y_p)**. El principal desafío es encontrar y_p. Para ello, se utiliza el **Método de los Coeficientes Indeterminados**, que funciona para formas comunes de $h(t)$ como polinomios, exponenciales o funciones trigonométricas. La clave de este método es proponer un .ensayo"para y_p de una forma similar a $h(t)$. Un caso especial, la **regla de modificación**, se aplica cuando el ensayo propuesto ya forma parte de la solución homogénea.

3.1. Principio de Superposición y el Método de Coeficientes Indeterminados

Definiciones
Dada una ecuación completa $ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = h(t)$, su solución general es:
$$y_t = y_h(t) + y_p(t) \tag{16}$$
donde:

- $\mathbf{y_h(t)}$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada, que ya sabemos cómo encontrar.
- $\mathbf{y_p(t)}$ es *una* solución cualquiera de la ecuación completa.

El **Método de los Coeficientes Indeterminados** consiste en proponer una forma para $y_p(t)$ con coeficientes desconocidos, sustituirla en la ecuación completa e igualar términos para determinar dichos coeficientes.

3.2. Reglas de Ensayo y la Regla de Modificación

Fórmulas y Procesos
La forma del ensayo para $y_p(t)$ depende de la forma de $h(t)$:

- Si $h(t)$ es un **polinomio** de grado p, se ensaya $y_p(t)$ como un polinomio completo de grado p.
- Si $h(t)$ es una **función exponencial** K^t, se ensaya $y_p(t) = AK^t$.
- Si $h(t)$ es $\sin(\phi t)$ o $\cos(\phi t)$, se ensaya $y_p(t) = A_1 \sin(\phi t) + A_2 \cos(\phi t)$.

Regla de Modificación: Si el ensayo propuesto para $y_p(t)$ contiene un término que ya es solución de la ecuación homogénea (asociado a una raíz r con multiplicidad m), el ensayo debe multiplicarse por $\mathbf{t^m}$.
Aplicación Práctica 1: Resolver $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 12$.

- **Paso 1 (Solución Homogénea):** La ecuación característica es $r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+2) = 0$. Las raíces son $r_1 = 3, r_2 = -2$.
$$y_h(t) = C_1(3)^t + C_2(-2)^t \tag{17}$$
- **Paso 2 (Ensayo para la Particular):** El término $h(t) = 12$ es un polinomio de grado 0 (una constante). Ensayamos $y_p(t) = A$. Este ensayo no coincide con $y_h(t)$.
- **Paso 3 (Determinar Coeficientes):** Sustituimos $y_p(t) = A$ en la ecuación completa. Como $y_{t+1} = A$ y $y_{t+2} = A$:
$$A - A - 6A = 12 \Rightarrow -6A = 12 \Rightarrow \mathbf{A = -2} \tag{18}$$
Así, $y_p(t) = -2$.
- **Paso 4 (Solución General):**
$$y_t = y_h(t) + y_p(t) = C_1(3)^t + C_2(-2)^t - 2 \tag{19}$$

Aplicación Práctica 2 (con Regla de Modificación): Resolver $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = (2t+1)3^t$.

- **Paso 1 (Solución Homogénea):** Es la misma que en el ejemplo anterior: $y_h(t) = C_1(3)^t + C_2(-2)^t$.
- **Paso 2 (Ensayo para la Particular):** El término $h(t)$ es el producto de un polinomio de grado 1 y una exponencial 3^t. El ensayo inicial sería $(At + B)3^t$. Sin embargo, el término $B \cdot 3^t$ es una solución de la homogénea (asociado a la raíz $r = 3$ con multiplicidad $m = 1$). Por lo tanto, aplicamos la regla de modificación multiplicando por t^1:
$$y_p(t) = t(At + B)3^t = (At^2 + Bt)3^t \tag{20}$$
- **Paso 3 (Determinar Coeficientes):** Se calculan $y_p(t+1)$, $y_p(t+2)$, se sustituyen en la ecuación y se agrupan términos. Este proceso (cuyos detalles algebraicos son extensos) lleva a:
$$[30At + (33A + 15B)]3^t = (2t+1)3^t \tag{21}$$
Igualando coeficientes:
$$30A = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 1/15} \tag{22}$$
$$33A + 15B = 1 \quad \Rightarrow \quad 33(1/15) + 15B = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B = -2/25} \tag{23}$$
- **Paso 4 (Solución General):**
$$y_t = \left(\frac{1}{15}t^2 - \frac{2}{25}t + C_1\right)3^t + C_2(-2)^t \tag{24}$$

3.3. Análisis e Ideas Clave

Análisis e Ideas Clave
La solución de una ecuación no homogénea revela cómo un sistema con una dinámica interna propia (y_h) responde a un estímulo externo ($h(t)$).
Ejemplo intuitivo económico: Un país tiene una tasa de crecimiento natural del PIB (la parte homogénea). El gobierno implementa un plan de infraestructura que inyecta una cantidad fija de dinero cada año (el término $h(t)$). La trayectoria final del PIB (y_t) será la suma de su crecimiento natural más la trayectoria forzada por la inversión constante. Si el estímulo (inversión) coincide con una "frecuencia natural"de la economía (la regla de modificación), su efecto se amplifica, causando un crecimiento resonante.

4. Análisis de Estabilidad y el Diagrama de Fase

Introducción

Más allá de encontrar una solución explícita, a menudo es más importante entender su comportamiento a largo plazo. El análisis de estabilidad determina si una variable converge a un valor de equilibrio o si se aleja de él. Esta sección formaliza el concepto y presenta una potente herramienta gráfica para el análisis cualitativo.

Temas y Subtemas

Se define formalmente el **punto de equilibrio** de un sistema y el criterio de **estabilidad asintótica**, que depende de que el módulo de todas las raíces características sea menor que 1. Se introduce el **diagrama de fase** para ecuaciones autónomas de primer orden ($y_{t+1} = f(y_t)$), una herramienta visual que permite analizar la dinámica sin resolver la ecuación. Se detalla su construcción, incluyendo la **línea de 45°** y la **línea de fase**. La estabilidad del equilibrio se determina gráficamente por la pendiente de la línea de fase en el punto de equilibrio, y la trayectoria se puede trazar usando la **regla de la telaraña**.

4.1. Criterio de Estabilidad

Definiciones
Un **punto de equilibrio** (o punto fijo) y^* es un valor tal que si el sistema lo alcanza, permanecerá allí. Para una ecuación autónoma $y_{t+1} = f(y_t)$, el equilibrio satisface $y^* = f(y^*)$.
La solución de una ecuación en diferencias es **estable** si, para cualquier condición inicial, la trayectoria y_t converge al punto de equilibrio a medida que $t \to \infty$.
Teorema de Estabilidad: La solución general es estable si y solo si **todas las raíces características** r_i (reales o complejas) tienen un **módulo menor que uno** ($|r_i| < 1$). Para raíces complejas, esto equivale a $\rho < 1$.

4.2. El Diagrama de Fase

Fórmulas y Procesos
El diagrama de fase es una herramienta gráfica para analizar $y_{t+1} = f(y_t)$.

1. Se dibuja en un plano con y_t en el eje horizontal y y_{t+1} en el vertical.
2. Se traza la **línea de 45°** ($y_{t+1} = y_t$). Todos los puntos de equilibrio deben estar sobre esta línea.
3. Se grafica la **línea de fase** ($y_{t+1} = f(y_t)$).
4. Los **puntos de equilibrio** y^* son las intersecciones entre la línea de fase y la línea de 45°.

La estabilidad local del equilibrio y^* depende de la pendiente de la línea de fase en ese punto, $f'(y^*)$:

- Si $|\mathbf{f'(y^*)| < 1}$, el equilibrio es **estable**.
- Si $|\mathbf{f'(y^*)| > 1}$, el equilibrio es **inestable**.

- Si $\mathbf{f'(y^*) > 0}$, la convergencia/divergencia es **monótona**.
- Si $\mathbf{f'(y^*) < 0}$, la trayectoria es **oscilatoria**.

Para ecuaciones lineales de primer orden, la pendiente $f'(y_t)$ es constante e igual a la raíz característica.
Aplicación Práctica 1: Analizar la estabilidad de $y_{t+1} = 6 - 2y_t$.

- **Paso 1 (Equilibrio):** Resolvemos $y^* = 6 - 2y^* \Rightarrow 3y^* = 6 \Rightarrow \mathbf{y^* = 2}$.
- **Paso 2 (Análisis de la Pendiente):** La función es $f(y_t) = 6 - 2y_t$. Su pendiente es $f'(y_t) = -2$ para todo y_t.
- **Paso 3 (Conclusión):** Como $|-2| = 2 > 1$, el equilibrio es **inestable**. Como la pendiente es negativa, la divergencia es **oscilatoria**.

Problema de Consolidación: El Modelo de la Telaraña (Cobweb)

Enunciado: Un mercado agrícola se describe por las siguientes ecuaciones de oferta y demanda, donde los productores deciden su oferta basándose en el precio del período anterior.

$$\text{Demanda: } Q_t^D = 100 - 2P_t \tag{25}$$
$$\text{Oferta: } Q_t^S = 20 + 1{,}2P_{t-1} \tag{26}$$

Analice la dinámica del precio en este mercado.
Solución Escalonada:

1. **Teoría (Formular la ecuación en diferencias):** En equilibrio, la cantidad demandada iguala a la ofrecida en cada período t: $Q_t^D = Q_t^S$.

   $$100 - 2P_t = 20 + 1{,}2P_{t-1} \tag{27}$$

   Despejando P_t, obtenemos la ecuación en diferencias de primer orden:

   $$2P_t = 80 - 1{,}2P_{t-1} \tag{28}$$
   $$P_t = 40 - 0{,}6P_{t-1} \tag{29}$$

   Esta es una ecuación de la forma $P_t = a + bP_{t-1}$, con $a = 40$ y $b = -0{,}6$.

2. **Cálculo (Equilibrio y Estabilidad):**
   - **Precio de Equilibrio (P^*):** Resolvemos $P^* = 40 - 0{,}6P^* \Rightarrow 1{,}6P^* = 40 \Rightarrow \mathbf{P^* = 25}$.
   - **Raíz Característica:** La raíz es $\mathbf{b = -0{,}6}$.
   - **Análisis de Estabilidad:** $|b| = |-0{,}6| = 0{,}6 < 1$. Por lo tanto, el equilibrio es **estable**.

3. **Interpretación (Dinámica del mercado):** Como la raíz característica $b = -0{,}6$ es negativa, la trayectoria de precios será **oscilatoria**. Dado que es estable, los precios convergerán al equilibrio de 25 en forma de una "telarañaçon oscilaciones amortiguadas. Por ejemplo, si $P_0 = 50$:
   - $P_1 = 40 - 0{,}6(50) = 10$ (el precio cae por debajo del equilibrio).
   - $P_2 = 40 - 0{,}6(10) = 34$ (el precio sube por encima del equilibrio).
   - $P_3 = 40 - 0{,}6(34) = 19{,}6$ (el precio vuelve a caer, pero más cerca del equilibrio).

   La convergencia ocurre porque la respuesta de la demanda al precio (pendiente de 2) es más fuerte que la de la oferta (pendiente de 1.2).

4.3. Análisis e Ideas Clave

Análisis e Ideas Clave
El diagrama de fase y el criterio de estabilidad nos permiten predecir el futuro de un sistema sin necesidad de calcular cada paso de la trayectoria. Es como saber si una pelota rodando por una colina terminará en el valle sin tener que seguir su camino exacto.
Ejemplo intuitivo económico (Modelo de la Telaraña): Imagina a los agricultores de papas. Si este año el precio de la papa es muy alto, todos deciden plantar más papas para el próximo año. El resultado es una sobreoferta masiva, que desploma el precio. Al ver precios tan bajos, muchos agricultores deciden no plantar papas el siguiente año. Esto causa una escasez, y el precio vuelve a dispararse. Este ciclo de sobre-reacción es la "telaraña", y solo se estabilizará si la reacción de los agricultores (oferta) es menos sensible que la reacción de los consumidores (demanda).

Red Conceptual: Ecuaciones en Diferencias y Dinámica Discreta

- **Resumen Breve y Categorizado**
  - **Naturaleza y Propósito:** Las ecuaciones en diferencias son la herramienta matemática para modelar sistemas dinámicos que evolucionan en **tiempo discreto**, es decir, en intervalos de tiempo fijos y separados (días, trimestres, años). Su objetivo principal es encontrar la **trayectoria temporal** de una variable, describiendo su valor en cualquier período futuro a partir de un patrón de cambio y una condición inicial. Son la contraparte discreta de las ecuaciones diferenciales.
  - **Clasificación Estructural:** Se clasifican sistemáticamente según su **orden** (memoria del sistema), **linealidad** (simplicidad de las relaciones), tipo de **coeficientes** (constantes o variables en el tiempo) y si son **homogéneas** (sin fuerzas externas) o **completas** (con un término independiente).
  - **Aplicaciones Económicas Fundamentales:** Son indispensables en economía para analizar fenómenos como las fluctuaciones de precios en el **modelo de la telaraña (Cobweb)**, la convergencia del ingreso en el **multiplicador keynesiano**, el crecimiento de activos financieros con interés compuesto y la generación de ciclos económicos endógenos.
- **Conceptos Principales**
  - **Tiempo Discreto:** Marco donde las variables se observan en instantes discretos, indexados por $t = 0, 1, 2, \ldots$.
  - **Operadores Fundamentales:**
    - **Operador Diferencia (Δ):** $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$. Es el análogo discreto de la derivada y mide el cambio entre períodos.
    - **Operador Desplazamiento (E):** $Ey_t = y_{t+1}$. Avanza la secuencia un período.
    - **Relación Algebraica:** Estos operadores están vinculados por la identidad $\Delta = E - I$, donde I es el operador identidad.
  - **Ecuación Característica:** Ecuación polinómica que resulta de proponer una solución de prueba de la forma $y_t = r^t$ en la ecuación homogénea. Sus raíces son el .ᴬDN"de la dinámica del sistema.
  - **Estructura de la Solución General:** Para ecuaciones lineales, la solución es la suma de dos componentes: $y_t = y_h(t) + y_p(t)$.
    - **Función Complementaria (y_h):** Solución de la parte homogénea. Describe la desviación transitoria respecto al equilibrio.
    - **Solución Particular (y_p):** Una solución cualquiera de la ecuación completa. Representa el **equilibrio intertemporal** o estado estacionario del sistema.
  - **Estabilidad:** Propiedad de una trayectoria de converger (estable) o divergir (inestable) de un punto de equilibrio a largo plazo.
  - **Punto de Equilibrio (y^*):** Un valor estacionario del sistema, donde si $y_t = y^*$, entonces $y_{t+k} = y^*$ para todo $k > 0$. Se encuentra resolviendo $y^* = f(y^*)$.
  - **Diagrama de Fase:** Herramienta gráfica para el análisis cualitativo de ecuaciones autónomas de primer orden ($y_{t+1} = f(y_t)$), que permite visualizar puntos de equilibrio, estabilidad y trayectorias.
- **Axiomas y Postulados (Teoremas Clave)**
  - **Principio de Superposición:** Para ecuaciones lineales, la solución general de la ecuación completa es la suma de la solución general de la homogénea y una solución particular. Además, cualquier combinación lineal de soluciones de una ecuación homogénea es también una solución.
  - **Teorema de Existencia y Unicidad:** Dada una ecuación de orden n y n condiciones iniciales, existe una única trayectoria temporal que satisface la ecuación. Este requisito es más simple de cumplir que en el caso de las ecuaciones diferenciales.

- **Teorema Fundamental de Estabilidad:** Una trayectoria es estable (converge al equilibrio) si y solo si el **módulo (valor absoluto) de todas las raíces características es estrictamente menor que 1** ($|r_i| < 1$).
- **Relación entre Raíces y Forma de la Solución Homogénea:**
  - **Raíces reales y distintas ($r_1, r_2, \dots$):** La solución es una combinación lineal de exponenciales: $y_h(t) = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t + \dots$.
  - **Raíz real repetida (r con multiplicidad m):** La solución introduce un polinomio en t: $y_h(t) = (C_1 + C_2 t + \dots + C_m t^{m-1}) r^t$.
  - **Raíces complejas conjugadas ($\alpha \pm \beta i$):** La solución real es una oscilación con amplitud modulada: $y_h(t) = \rho^t (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$, donde ρ es el módulo y ω el argumento.

- **Relaciones y Aplicaciones Clave**
  - **Analogía con Ecuaciones Diferenciales (EDO):** Comparten una estructura de solución similar (homogénea + particular), pero difieren crucialmente en el criterio de estabilidad ($|r| < 1$ en EED vs. $\text{Re}(\lambda) < 0$ en EDO) y en que las EED de primer orden pueden oscilar.
  - **Conexión con Álgebra Lineal:** Los sistemas de EED se resuelven eficientemente usando matrices, donde los autovalores de la matriz de transición actúan como las raíces características y determinan la estabilidad.
  - **Vínculo con Optimización Dinámica:** Las EED funcionan como la **ecuación de movimiento** (restricción dinámica) en problemas de control óptimo y programación dinámica. La **ecuación de Euler**, derivada de las condiciones de optimalidad, es a menudo una EED de segundo orden.
  - **Aplicaciones Económicas Distintivas:**
    - **Modelo de la Telaraña:** Su raíz característica es negativa, lo que siempre genera **oscilaciones** en los precios. La estabilidad depende de la relación entre las pendientes de oferta y demanda.
    - **Multiplicador Keynesiano:** Su raíz (propensión a consumir) está entre 0 y 1, lo que produce una **convergencia monótona** del ingreso al equilibrio.
    - **Crecimiento de Activos:** Su raíz es mayor que 1, lo que resulta en una **divergencia monótona** (crecimiento exponencial).

- **Secuencia Lógica Desarrollada del Cálculo**
  - **Paso 1: Clasificar la Ecuación.** Identificar su orden, linealidad, tipo de coeficientes y si es homogénea o completa.
  - **Paso 2: Resolver la Ecuación Homogénea (y_h).**
    - Formular la **ecuación característica** proponiendo la solución de prueba $y_t = r^t$.
    - Encontrar todas las raíces de la ecuación característica.
    - Escribir la **función complementaria (y_h)** como una combinación lineal de los términos correspondientes a cada tipo de raíz (real, repetida, compleja).
  - **Paso 3: Encontrar una Solución Particular (y_p) (si es no homogénea).**
    - Aplicar el **Método de los Coeficientes Indeterminados**.
    - Proponer un ensayo para y_p con una forma similar a la del término no homogéneo $h(t)$.
    - Aplicar la **Regla de Modificación**: si el ensayo coincide con un término de y_h, multiplicarlo por t^m (donde m es la multiplicidad de la raíz asociada).
    - Sustituir el ensayo en la ecuación completa para determinar los coeficientes.
  - **Paso 4: Construir la Solución General.**
    - Sumar las dos partes: $y_t = y_h(t) + y_p(t)$. Esta solución contendrá n constantes arbitrarias, donde n es el orden de la ecuación.
  - **Paso 5: Aplicar Condiciones Iniciales.**
    - Usar los valores dados ($y_0, y_1, \dots$) para establecer un sistema de ecuaciones lineales.
    - Resolver el sistema para encontrar los valores numéricos de las constantes arbitrarias.

- **Paso 6: Analizar la Dinámica.**
  - Examinar las raíces características para determinar la **estabilidad** de la trayectoria (si $|r_i| < 1$ para todas las raíces).
  - Observar el signo de las raíces reales y la presencia de raíces complejas para determinar si la trayectoria es **monótona u oscilatoria**.

Sistemas de Ecuaciones en Diferencia

@toobaziti

Disclaimer: Este documento se ha elaborado a partir de la grabación de una clase, la presentación visual consultada y/o el material bibliográfico recomendado. Dada la naturaleza de su composición, podría contener imprecisiones u omisiones derivadas de la calidad del audio, interrupciones involuntarias o errores de redacción. Se recomienda siempre consultar la grabación o fuente original correspondiente para confirmar cualquier detalle en caso de duda.

Índice

1. Fundamentos de los Sistemas de Ecuaciones en Diferencias **1**
- 1.1. Introducción . . . 1
- 1.2. Temas Principales . . . 1
  - 1.2.1. Definición y Representación Matricial . . . 1
  - 1.2.2. Estructura de la Solución General . . . 1
- 1.3. Ejemplo Intuitivo: Modelo de Inventarios . . . 1

2. Resolución de Sistemas Homogéneos **1**
- 2.1. Introducción . . . 1
- 2.2. Temas Principales . . . 2
  - 2.2.1. El Método de Autovalores y Autovectores . . . 2
  - 2.2.2. Solución General para Matrices Diagonalizables . . . 2
- 2.3. Aplicación Práctica: Sistema 2x2 Homogéneo . . . 2
- 2.4. Problema de Consolidación: Sistema de Orden Superior . . . 3

3. Resolución de Sistemas No Homogéneos **3**
- 3.1. Introducción . . . 3
- 3.2. Temas Principales . . . 3
  - 3.2.1. El Método de los Coeficientes Indeterminados . . . 3
  - 3.2.2. Casos Típicos y Resonancia . . . 4
- 3.3. Aplicación Práctica: Sistema No Homogéneo con Término Constante . . . 4
- 3.4. Problema de Consolidación: Resonancia . . . 4

4. Análisis de Estabilidad y Sistemas No Lineales **5**
- 4.1. Introducción . . . 5
- 4.2. Temas Principales . . . 5
  - 4.2.1. Criterio de Estabilidad para Sistemas Lineales . . . 5
  - 4.2.2. Linealización de Sistemas No Lineales . . . 5
- 4.3. Aplicación Práctica: Modelo de Telaraña (Cobweb) . . . 6
- 4.4. Problema de Consolidación: Modelo de Lotka-Volterra . . . 6

1. Fundamentos de los Sistemas de Ecuaciones en Diferencias

1.1. Introducción

Un sistema de ecuaciones en diferencias modela la evolución de múltiples variables interdependientes a lo largo del tiempo discreto. Su análisis es crucial para predecir el comportamiento a largo plazo de un sistema, determinando si las variables convergen a un equilibrio, oscilan de forma estable o divergen de manera explosiva.

1.2. Temas Principales

Los temas fundamentales incluyen la definición formal de estos sistemas, su representación matricial y la estructura de su solución general. La notación matricial es esencial, ya que compacta la dinámica del sistema en una matriz de coeficientes, facilitando un análisis riguroso. La solución general se construye sobre el principio de superposición, distinguiendo entre la dinámica intrínseca del sistema y su respuesta a fuerzas externas, lo que sienta las bases para todos los métodos de resolución posteriores.

1.2.1. Definición y Representación Matricial

Un sistema de ecuaciones en diferencias consta de dos o más ecuaciones que incluyen dos o más funciones incógnita. Para que un sistema lineal tenga solución, el número de ecuaciones debe ser igual al número de funciones incógnita. La forma más compacta y analíticamente poderosa de representar estos sistemas es la notación matricial, que distingue entre sistemas homogéneos y no homogéneos.

- **Sistema Homogéneo**: Describe la dinámica interna del sistema sin influencias externas.

$$y_{t+1} = Ay_t \tag{1}$$

- **Sistema No Homogéneo**: Incluye un vector de forzamiento externo $g(t)$.

$$y_{t+1} = Ay_t + g(t) \tag{2}$$

Donde y_t es el vector de estado en el tiempo t, A es la matriz de coeficientes y $g(t)$ es el vector de términos independientes.

1.2.2. Estructura de la Solución General

La solución general de un sistema lineal no homogéneo, y_t, se obtiene mediante el principio de superposición. Es la suma de dos componentes: la **solución homogénea** ($y_t^{(h)}$), también llamada función complementaria, que describe la dinámica intrínseca del sistema (la solución de $y_{t+1} = Ay_t$), y una **solución particular** ($y_t^{(p)}$), o integral particular, que satisface la ecuación completa. Esta estructura permite analizar por separado la estabilidad inherente del sistema y su respuesta a estímulos externos.

$$y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(p)} \tag{3}$$

1.3. Ejemplo Intuitivo: Modelo de Inventarios

Pensemos en una tienda. El **inventario** del próximo mes (I_{t+1}) depende del inventario actual (I_t), los nuevos **pedidos** que llegan (P_t) y las ventas. A su vez, los pedidos que la tienda realiza para el futuro se basan en las ventas y el nivel de inventario actual. Inventario y pedidos son dos variables interconectadas que evolucionan juntas en pasos discretos (meses), formando un sistema de ecuaciones en diferencias que describe la dinámica del negocio.

2. Resolución de Sistemas Homogéneos

2.1. Introducción

Esta sección introduce la técnica central para resolver sistemas homogéneos, la cual describe la dinámica intrínseca del sistema. El método se basa en los conceptos de autovalores y autovectores, que permiten descomponer interacciones complejas en "modos"de comportamiento más simples e independientes, sentando las bases para análisis más avanzados.

2.2. Temas Principales

El enfoque principal es el papel de los **autovalores** (λ) y **autovectores** (x) para encontrar la solución. Si la matriz de coeficientes A es diagonalizable, la solución general es una combinación lineal de estos componentes, donde cada modo propio evoluciona de forma independiente según el factor λ^t. Este método de diagonalización transforma un problema de dinámica acoplada en un conjunto de evoluciones escalares sencillas, revelando la estructura fundamental del sistema.

2.2.1. El Método de Autovalores y Autovectores

La base de la resolución es encontrar los pares de autovalor-autovector (λ, x) que satisfacen la ecuación fundamental:

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0 \tag{4}$$

Un autovector x representa una dirección en el espacio de estado que permanece invariante bajo la transformación A; solo es escalado por el autovalor λ. Si la condición inicial del sistema, y_0, es un autovector x, la evolución temporal es trivialmente $y_t = \lambda^t x$. El método consiste en encontrar todos los pares (λ_i, x_i) resolviendo la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$ para los autovalores y luego el sistema $(A - \lambda_i I)x_i = 0$ para los autovectores.

2.2.2. Solución General para Matrices Diagonalizables

Si la matriz A es diagonalizable, significa que existe una base de autovectores. En este caso, cualquier condición inicial y_0 puede expresarse como una combinación lineal de estos autovectores. La solución general del sistema homogéneo $y_{t+1} = Ay_t$ es entonces una superposición de los modos propios, donde cada uno evoluciona de forma independiente:

$$y(t) = C_1 x_1 \lambda_1^t + C_2 x_2 \lambda_2^t + \cdots + C_n x_n \lambda_n^t \tag{5}$$

Las constantes C_i son escalares que se determinan a partir de la condición inicial y_0.

2.3. Aplicación Práctica: Sistema 2x2 Homogéneo

Consideremos el sistema:

$$x_{t+1} + 2x_t + 3y_t = 0 \tag{6}$$
$$y_{t+1} + 2y_t + 3x_t = 0 \tag{7}$$

con condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $y_0 = 3/5$.
Paso 1: Forma Matricial. Reordenando, obtenemos $x_{t+1} = -2x_t - 3y_t$ y $y_{t+1} = -3x_t - 2y_t$. La forma matricial es $y_{t+1} = Ay_t$:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \tag{8}$$

Paso 2: Ecuación Característica y Autovalores. Calculamos el determinante de $(A - \lambda I)$:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \tag{9}$$

Las raíces (autovalores) son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -5$.
Paso 3: Autovectores. Para $\lambda_1 = 1$, resolvemos $(A - I)x = 0$, que es $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Esto implica $-3x_1 - 3x_2 = 0$, o $x_2 = -x_1$. Un autovector es $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Para $\lambda_2 = -5$, resolvemos $(A + 5I)x = 0$, que es $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto implica $3x_1 - 3x_2 = 0$, o $x_1 = x_2$. Un autovector es $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Paso 4: Solución General. La solución general es una combinación lineal de los modos propios:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = C_1 (1)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 (-5)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Paso 5: Constantes con Condiciones Iniciales. Para $t = 0$, tenemos $x_0 = 1$ y $y_0 = 3/5$:

$$C_1 + C_2 = 1 \tag{11}$$
$$-C_1 + C_2 = 3/5 \tag{12}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $C_1 = 1/5$ y $C_2 = 4/5$.
Paso 6: Solución Final. La solución particular es:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}(-5)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

2.4. Problema de Consolidación: Sistema de Orden Superior

Enunciado: Analice la dinámica del sistema homogéneo dado por:

$$x_{t+2} + 6x_t + 7y_t = 0 \tag{14}$$
$$y_{t+2} + 2y_t + 3x_t = 0 \tag{15}$$

Solución Escalonada:

- **Teoría:** Un sistema de orden superior se puede analizar usando la matriz de operadores $G(E)$, donde E es el operador desplazamiento ($Ey_t = y_{t+1}$). La ecuación característica, que determina la dinámica, se obtiene de la condición $|G(E)| = 0$.
- **Cálculo:** El sistema en forma matricial de operadores es:

$$\begin{pmatrix} E^2 + 6 & 7 \\ 3 & E^2 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

  La ecuación característica es $|G(E)| = (E^2 + 6)(E^2 + 2) - 21 = 0$, que se simplifica a:

$$E^4 + 8E^2 - 9 = 0 \tag{17}$$

  Factorizando, $(E^2 + 9)(E^2 - 1) = 0$. Las raíces (autovalores) son $E = \pm 1$ y $E = \pm 3i$.
- **Interpretación:** El sistema tiene cuatro modos de comportamiento. Los autovalores reales $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ generan componentes que son constantes o que alternan de signo. Los autovalores complejos conjugados $\lambda_{3,4} = \pm 3i$ generan un comportamiento oscilatorio, cuya amplitud crece en el tiempo ya que su módulo es $|\pm 3i| = 3 > 1$, haciendo al sistema inestable.

3. Resolución de Sistemas No Homogéneos

3.1. Introducción

Esta sección aborda sistemas influenciados por factores externos, representados por un término de forzamiento $g(t)$. El **método de los coeficientes indeterminados** es una técnica práctica y poderosa para encontrar una solución particular que capture la respuesta del sistema a estos estímulos, completando así la solución general.

3.2. Temas Principales

Se detalla el método de los coeficientes indeterminados, donde se propone una solución particular $y_t^{(p)}$ con una forma funcional que imita al término de forzamiento $g(t)$. Se cubren los casos más comunes para $g(t)$ (constante, exponencial y polinomio) y se introduce el concepto crítico de **resonancia**, que ocurre cuando el forzamiento externo coincide con un modo natural del sistema, requiriendo una modificación en la solución propuesta.

3.2.1. El Método de los Coeficientes Indeterminados

La intuición del método es que la forma de la respuesta del sistema a un forzamiento externo se asemeja a la forma del propio forzamiento. El procedimiento consiste en proponer (.ensayar") una solución particular $y_t^{(p)}$ con coeficientes desconocidos (vectores constantes). Esta propuesta se sustituye en la ecuación no homogénea completa, y se resuelven los coeficientes para que la ecuación se satisfaga. El método es eficiente cuando $g(t)$ tiene una forma funcional simple como una constante, una exponencial, un polinomio o una combinación de ellas.

3.2.2. Casos Típicos y Resonancia

La forma de la solución particular a ensayar depende de $g(t)$:

- **Si $g(t)$ es un vector de constantes** H: Se ensaya $y_t^{(p)} = A$. La solución es $A = [G(1)]^{-1}H$, siempre que 1 no sea un autovalor.
- **Si $g(t)$ es un vector exponencial** $k \cdot b^t$: Se ensaya $y_t^{(p)} = A \cdot b^t$. La solución es $A = [G(b)]^{-1}k$, siempre que b no sea un autovalor.
- **Resonancia**: Ocurre si la forma ensayada ya es solución de la parte homogénea (ej. b es un autovalor). En este caso, la propuesta debe multiplicarse por un polinomio en t (usualmente t) para asegurar la independencia lineal y encontrar la solución correcta.

3.3. Aplicación Práctica: Sistema No Homogéneo con Término Constante

Resolver el sistema:

$$2x_{t+1} - 3x_t + 5y_t = 2 \tag{18}$$
$$2x_t + y_{t+1} - 2y_t = 7 \tag{19}$$

Paso 1: Forma Matricial y Solución Homogénea. Usando el operador E, el sistema es $G(E)y_t = H$:

$$\begin{pmatrix} 2E-3 & 5 \\ 2 & E-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{20}$$

La ecuación característica es $|G(E)| = (2E-3)(E-2) - 10 = 2E^2 - 7E - 4 = 0$. Las raíces son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1/2$. Los autovectores asociados son $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. La solución homogénea es:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}^{(h)} = C_1(4)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Paso 2: Solución Particular. El término de forzamiento es un vector constante. Como $\lambda = 1$ no es autovalor, ensayamos una solución particular constante $y_t^{(p)} = A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. Sustituyendo en el sistema, E actúa como 1, por lo que resolvemos $G(1)A = H$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Paso 3: Cálculo de los Coeficientes. Para resolver para A, calculamos la inversa de $G(1)$:

$$[G(1)]^{-1} = \frac{1}{(-1)(-1) - (5)(2)} \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Entonces, $A = [G(1)]^{-1}H$:

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1(2) + 5(7) \\ 2(2) + 1(7) \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 37 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/9 \\ 11/9 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Paso 4: Solución General Completa. La solución general es la suma de la homogénea y la particular:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = C_1(4)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 37/9 \\ 11/9 \end{pmatrix} \tag{25}$$

3.4. Problema de Consolidación: Resonancia

Enunciado: Analice y resuelva la ecuación en diferencias no homogénea $y_{t+1} = 2y_t + 3 \cdot 2^t$. **Solución Escalonada:**

- **Teoría:** El término de forzamiento es $g(t) = 3 \cdot 2^t$. La base de la exponencial, $b = 2$, es idéntica al autovalor de la ecuación homogénea $y_{t+1} = 2y_t$ (cuya solución es $C \cdot 2^t$). Esto es un caso de resonancia, por lo que el ensayo estándar $y_t^{(p)} = u \cdot 2^t$ fallará. Debemos modificarlo multiplicando por t.
- **Cálculo:** Proponemos la solución particular $y_t^{(p)} = u \cdot t \cdot 2^t$. Entonces, $y_{t+1}^{(p)} = u(t+1)2^{t+1}$. Sustituimos en la ecuación original:

$$u(t+1)2^{t+1} = 2(u \cdot t \cdot 2^t) + 3 \cdot 2^t \tag{26}$$

  Dividimos toda la ecuación por 2^t:

$$u(t+1)2 = 2ut + 3 \tag{27}$$
$$2ut + 2u = 2ut + 3 \tag{28}$$

  Cancelando $2ut$, obtenemos $2u = 3$, por lo que $u = 3/2$. La solución particular es $y_t^{(p)} = \frac{3}{2}t \cdot 2^t$.
- **Interpretación:** La resonancia ocurre cuando el forzamiento externo .empuja.al sistema a una frecuencia que coincide con su modo natural de comportamiento. Esto causa una respuesta amplificada que crece más rápido que el modo natural, como lo indica el factor t. Es un efecto de acumulación donde cada pulso del forzamiento refuerza el movimiento anterior.

4. Análisis de Estabilidad y Sistemas No Lineales

4.1. Introducción

Esta sección final se enfoca en el comportamiento a largo plazo de los sistemas. Establece el criterio fundamental para la estabilidad en sistemas lineales y extiende el análisis a sistemas no lineales mediante la **linealización**, una técnica poderosa para comprender el comportamiento local cerca de puntos de equilibrio, ilustrada con un modelo económico clásico.

4.2. Temas Principales

Se define la **estabilidad asintótica** y se presenta su criterio fundamental: todos los autovalores de la matriz A deben tener un módulo estrictamente menor que 1. Luego, se introduce el análisis de sistemas no lineales, que implica encontrar puntos de equilibrio y usar la **matriz Jacobiana** para linealizar el sistema localmente. Esto permite evaluar la estabilidad aplicando el mismo criterio de autovalores al sistema linealizado.

4.2.1. Criterio de Estabilidad para Sistemas Lineales

Un sistema lineal $y_{t+1} = Ay_t$ es **asintóticamente estable** si, para cualquier condición inicial, la solución y_t converge a cero cuando $t \to \infty$. La condición necesaria y suficiente para esto se basa en los autovalores λ_i de la matriz A:

El sistema es asintóticamente estable si y solo si todos sus autovalores satisfacen $|\lambda_i| < 1$.

Esta condición es equivalente a que el radio espectral de A, $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$, sea menor que 1. Si al menos un autovalor tiene $|\lambda_i| > 1$, el sistema es inestable. El caso $|\lambda_i| = 1$ es marginal y puede llevar a oscilaciones sostenidas o inestabilidad si la matriz no es diagonalizable.

4.2.2. Linealización de Sistemas No Lineales

Para un sistema no lineal $y_{t+1} = F(y_t)$, el análisis de estabilidad se centra en sus **puntos de equilibrio** y^*, donde $F(y^*) = y^*$. El comportamiento del sistema cerca de y^* se aproxima mediante un sistema lineal cuya matriz es la **matriz Jacobiana** J de F, evaluada en el punto de equilibrio, $J = DF(y^*)$. La estabilidad local de y^* en el sistema no lineal se determina a partir de los autovalores de esta matriz Jacobiana, aplicando el mismo criterio de módulo menor a 1. La linealización no es informativa si algún autovalor de J tiene módulo exactamente 1.

4.3. Aplicación Práctica: Modelo de Telaraña (Cobweb)

Consideremos un mercado donde la oferta reacciona con un rezago al precio.

$$Q_t^D = -aP_t + b \quad \text{(Demanda)} \tag{29}$$

$$Q_t^S = cP_{t-1} - d \quad \text{(Oferta)} \tag{30}$$

con $a, b, c, d > 0$.

Paso 1: Ecuación Dinámica del Precio. En el equilibrio de mercado, $Q_t^D = Q_t^S$, por lo que $-aP_t + b = cP_{t-1} - d$. Despejando P_t, obtenemos la ecuación en diferencias de primer orden:

$$P_t = \frac{b+d}{a} - \frac{c}{a}P_{t-1} \tag{31}$$

Paso 2: Precio de Equilibrio. El equilibrio o punto fijo P^* se encuentra haciendo $P_t = P_{t-1} = P^*$.

$$P^* = \frac{b+d}{a} - \frac{c}{a}P^* \implies P^*\left(1 + \frac{c}{a}\right) = \frac{b+d}{a} \implies P^* = \frac{b+d}{a+c} \tag{32}$$

Paso 3: Análisis de Estabilidad. La dinámica es de la forma $P_t = \alpha + \beta P_{t-1}$, donde el .ªutovalor.es $\beta = -c/a$. La condición de estabilidad es $|\beta| < 1$:

$$\left|-\frac{c}{a}\right| < 1 \implies \frac{c}{a} < 1 \implies c < a \tag{33}$$

Paso 4: Interpretación. El equilibrio es estable si la pendiente de la curva de demanda en valor absoluto (a) es mayor que la de la oferta (c). Como el coeficiente β es negativo, la convergencia hacia el equilibrio es **oscilatoria amortiguada**. El precio zigzaguea alrededor de P^*, con oscilaciones cada vez más pequeñas hasta converger.

4.4. Problema de Consolidación: Modelo de Lotka-Volterra

Enunciado: Analice la estabilidad local del modelo presa-depredador discreto:

$$\Delta x_t = \alpha x_t - \beta x_t y_t \tag{34}$$

$$\Delta y_t = \delta x_t y_t - \gamma y_t \tag{35}$$

donde x_t son las presas y y_t los depredadores, y todos los parámetros son positivos. **Solución Escalonada:**

- **Teoría:** Este es un sistema no lineal. Para analizar su estabilidad, debemos encontrar sus puntos de equilibrio y luego linealizar el sistema en torno a ellos calculando la matriz Jacobiana. La estabilidad local se determinará a partir de los autovalores de dicha matriz.
- **Cálculo:**
  1. **Puntos de Equilibrio:** Se obtienen al igualar $\Delta x_t = 0$ y $\Delta y_t = 0$. Esto nos da dos equilibrios: el trivial $(0, 0)$ y el de coexistencia $(x^*, y^*) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$.
  2. **Linealización:** Primero, reescribimos el sistema en su forma de mapa:

$$x_{t+1} = x_t(1 + \alpha - \beta y_t) = f(x_t, y_t) \tag{36}$$

$$y_{t+1} = y_t(1 - \gamma + \delta x_t) = g(x_t, y_t) \tag{37}$$

  La matriz Jacobiana general es $J(x, y) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & 1 - \gamma + \delta x \end{pmatrix}$.

  3. **Evaluación en el Equilibrio de Coexistencia:**

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha - \beta(\alpha/\beta) & -\beta(\gamma/\delta) \\ \delta(\alpha/\beta) & 1 - \gamma + \delta(\gamma/\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

  4. **Autovalores:** La ecuación característica es $\lambda^2 - (\text{Traza})\lambda + (\text{Determinante}) = 0$. La traza es $T = 2$ y el determinante es $D = 1 + \alpha\gamma$.

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1 + \alpha\gamma) = 0 \tag{39}$$

  Las raíces son $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1+\alpha\gamma)}}{2} = 1 \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$.

- **Interpretación:** El módulo de los autovalores es $|\lambda| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{\alpha\gamma})^2} = \sqrt{1 + \alpha\gamma}$. Como α y γ son positivos, este módulo es estrictamente mayor que 1. Por lo tanto, el punto de equilibrio de coexistencia es **localmente inestable**. La dinámica cercana a este punto es una espiral repulsiva, lo que significa que las poblaciones oscilarán con amplitudes crecientes.

Red Conceptual de Sistemas de Ecuaciones en Diferencias

- **Resumen breve y categorizado**
  - **Definición y Propósito:** Un sistema de ecuaciones en diferencias modela la evolución de múltiples variables interdependientes en tiempo discreto. Su objetivo es encontrar las trayectorias temporales que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones, permitiendo analizar el comportamiento a largo plazo del sistema (convergencia, oscilación o divergencia).
  - **Clasificación:** Los sistemas se clasifican en *homogéneos* ($y_{t+1} = Ay_t$), que describen la dinámica intrínseca, y *no homogéneos* ($y_{t+1} = Ay_t + g(t)$), que incorporan fuerzas externas.
  - **Método de Solución:** La solución general se basa en el principio de superposición: es la suma de la solución homogénea (función complementaria) y una solución particular. La parte homogénea se resuelve mediante autovalores y autovectores de la matriz de coeficientes A, mientras que la particular se halla comúnmente con el método de los coeficientes indeterminados.
  - **Análisis de Estabilidad:** La estabilidad asintótica de un sistema lineal depende críticamente de los autovalores (λ_i). El sistema es estable si y solo si todos los autovalores tienen un módulo estrictamente menor a 1 ($|\lambda_i| < 1$).
  - **Sistemas No Lineales:** Se analizan localmente alrededor de puntos de equilibrio mediante la linealización. La matriz Jacobiana del sistema, evaluada en el equilibrio, determina la estabilidad local aplicando el mismo criterio de autovalores.
- **Conceptos Principales**
  - **Sistema de Ecuaciones en Diferencias:** Conjunto de dos o más ecuaciones que relacionan los valores de varias funciones incógnita en un tiempo t con sus valores en tiempos anteriores.
  - **Vector de Estado (y_t):** Vector columna que contiene los valores de todas las variables del sistema en el instante t.
  - **Matriz de Coeficientes (A):** Matriz que encapsula las interrelaciones dinámicas entre las variables del sistema.
  - **Autovalor (λ) y Autovector (x):** Escalar y vector, respectivamente, que satisfacen $Ax = \lambda x$. Los autovalores determinan las tasas de crecimiento, decaimiento u oscilación de los modos del sistema (factores λ^t), mientras que los autovectores definen las direcciones invariantes de la dinámica.
  - **Ecuación Característica:** Ecuación polinómica $|A - \lambda I| = 0$ (o $|G(E)| = 0$) cuyas raíces son los autovalores del sistema.
  - **Estabilidad Asintótica:** Propiedad de un sistema cuya solución homogénea tiende a cero cuando $t \to \infty$. Garantiza la convergencia hacia un equilibrio.
  - **Punto de Equilibrio (Punto Fijo):** Un estado del sistema donde las variables permanecen constantes a lo largo del tiempo ($y_{t+1} = y_t$).
  - **Operador Desplazamiento (E):** Operador definido por $Ey_t = y_{t+1}$, utilizado para expresar el sistema en forma de una matriz de operadores $G(E)$.
  - **Matriz Jacobiana (J):** Matriz de las derivadas parciales de primer orden de un sistema no lineal. Es la herramienta clave para la linealización.
  - **Resonancia:** Fenómeno en sistemas no homogéneos que ocurre cuando la forma funcional del término de forzamiento coincide con una solución de la parte homogénea.
- **Axiomas y Postulados Fundamentales**
  - **Principio de Superposición (Sistemas Lineales):** La solución general de un sistema no homogéneo es la suma de la solución general de su parte homogénea asociada y una solución particular cualquiera.
  - **Teorema de Solución Homogénea (Caso Diagonalizable):** Si la matriz de coeficientes A es diagonalizable, la solución general del sistema homogéneo $y_{t+1} = Ay_t$ es una combinación lineal de sus modos propios: $y_t = \sum C_i x_i \lambda_i^t$.

- **Criterio de Estabilidad Asintótica (Discreto):** Un sistema lineal $y_{t+1} = Ay_t$ es asintóticamente estable si y solo si todos los autovalores de la matriz A tienen un módulo estrictamente menor que 1.
- **Principio de Linealización para Estabilidad Local:** La estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema no lineal se determina, bajo ciertas condiciones (punto hiperbólico), por la estabilidad de su aproximación lineal, gobernada por la matriz Jacobiana evaluada en dicho punto.

▪ **Relaciones y Aplicaciones Clave**

- **Equivalencia con Ecuaciones de Orden Superior:** Un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden es equivalente a una única ecuación en diferencias de orden n.
- **Analogía con Sistemas Diferenciales:** La metodología de resolución es análoga (autovalores y autovectores), pero la forma de la solución (λ^t vs. $e^{\lambda t}$) y el criterio de estabilidad ($|\lambda| < 1$ vs. $\text{Re}(\lambda) < 0$) son distintos.
- **Aplicación Económica - Modelo de Telaraña (Cobweb):** Modela fluctuaciones de precios en mercados con rezagos en la oferta. Se reduce a una ecuación lineal de primer orden, donde la estabilidad (convergencia oscilatoria) depende de la relación entre las pendientes de las curvas de oferta y demanda.
- **Aplicación Económica - Modelo de Lotka-Volterra:** Sistema no lineal que describe la interacción presa-depredador. Su análisis de estabilidad local vía linealización revela que la versión discreta simple suele ser inestable, pero puede estabilizarse al incluir términos de autorregulación (p. ej., competencia intraespecífica).

▪ **Secuencia Lógica de Cálculo**

- **Análisis de un Sistema Lineal ($y_{t+1} = Ay_t + g(t)$)**
  1. **Forma Matricial:** Escribir el sistema para identificar la matriz A y el vector $g(t)$.
  2. **Solución Homogénea ($y_t^{(h)}$):**
     - Calcular los autovalores λ_i resolviendo la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$.
     - Para cada λ_i, encontrar el autovector x_i asociado resolviendo $(A - \lambda_i I)x_i = 0$.
     - Construir la solución homogénea según la naturaleza de las raíces:
       - **Reales distintas:** Combinación lineal de $C_i x_i \lambda_i^t$.
       - **Complejas conjugadas:** Expresar en términos de seno y coseno con un factor de decaimiento/crecimiento ρ^t, donde $\rho = |\lambda|$.
       - **Reales repetidas (no diagonalizable):** Introducir términos polinomiales en t y vectores generalizados. Para una raíz λ doble con un autovector x_1, la solución incluye $x_1\lambda^t$ y un término que involucra $t\lambda^t$ y un vector generalizado x_2 tal que $(A - \lambda I)x_2 = x_1$.
  3. **Solución Particular ($y_t^{(p)}$), si $g(t) \neq 0$:**
     - Proponer una forma para $y_t^{(p)}$ análoga a $g(t)$ (constante, exponencial, polinomio, etc.).
     - Verificar si hay resonancia (si el ensayo es solución de la parte homogénea). De ser así, multiplicar el ensayo por t.
     - Sustituir en la ecuación completa y resolver para los coeficientes indeterminados.
  4. **Solución General y Condiciones Iniciales:** Sumar $y_t = y_t^{(h)} + y_t^{(p)}$ y usar y_0 para hallar las constantes C_i.
  5. **Análisis de Estabilidad:** Verificar si $|\lambda_i| < 1$ para todos los autovalores.
- **Análisis de un Sistema No Lineal ($y_{t+1} = F(y_t)$)**
  1. **Puntos de Equilibrio:** Encontrar las soluciones y^* de la ecuación $y^* = F(y^*)$.
  2. **Linealización:** Calcular la matriz Jacobiana $J(y)$ del sistema.
  3. **Análisis de Estabilidad Local:**
     - Evaluar la Jacobiana en cada punto de equilibrio y^* para obtener la matriz $J(y^*)$.
     - Calcular los autovalores de $J(y^*)$.

- Concluir sobre la estabilidad: es localmente estable si todos los autovalores tienen módulo menor a 1; inestable si alguno lo tiene mayor a 1; y el análisis no es concluyente si el módulo máximo es 1.

Cálculo de Variaciones y Optimización Dinámica

@toobaziti

19 de octubre de 2025

Aclaración Importante

Este material fue generado con herramientas de IA a partir de la grabación de la clase, la presentación y los textos recomendados. Durante este proceso, la calidad del audio o posibles interrupciones pueden dar lugar a imprecisiones. Por esta razón, el documento debe ser considerado una guía de estudio y no un sustituto de las fuentes originales. Para confirmar cualquier información, por favor, remítase a ellas.

Índice

1 Introducción a la Optimización Dinámica **3**
1.1 El Salto de lo Estático a lo Dinámico 3
1.2 El Funcional: El Corazón del Problema 3
1.3 Analogía Intuitiva: Planificación de un Viaje 4
1.4 Problema de Consolidación 4

2 La Ecuación de Euler-Lagrange: Condición de Optimalidad **4**
2.1 El Principio de Variación 4
2.2 Casos Especiales de la Ecuación de Euler 5
2.3 Problema de Consolidación 6

3 Deducción y Forma Expandida de la Ecuación de Euler **6**
3.1 El Camino Formal: De la Variación a la Ecuación Diferencial 6
3.2 La Ecuación de Euler en Forma Desarrollada 7

4 Aplicación Práctica 1: Minimización **7**
4.1 Planteamiento del Problema 7
4.2 Resolución Paso a Paso 8
4.3 Verificación de Suficiencia: La Condición de Legendre 9

5 Aplicación Práctica 2: Maximización **9**
5.1 Planteamiento del Problema 9
5.2 Resolución Paso a Paso 10
5.3 Verificación de Suficiencia para un Máximo 11
5.4 Problema de Consolidación Final 11

1 Introducción a la Optimización Dinámica

1.1 El Salto de lo Estático a lo Dinámico

En el mundo de la optimización, el enfoque más simple es el **estático**. Este consiste en encontrar el mejor valor posible de una variable en un único instante, como si tomáramos una fotografía de un problema y buscáramos la solución óptima en esa imagen congelada. Por ejemplo, una empresa podría querer maximizar su beneficio *hoy*, eligiendo el nivel de producción que iguala el ingreso marginal al costo marginal.

Sin embargo, la mayoría de las decisiones importantes en economía, ingeniería y ciencias tienen consecuencias que se extienden en el tiempo. Aquí es donde la **optimización dinámica** se vuelve indispensable. En lugar de una fotografía, consideramos una película completa. No buscamos un punto óptimo, sino una **trayectoria** o **senda** óptima a lo largo de un horizonte temporal.

El **Cálculo de Variaciones** es la principal herramienta matemática para abordar estos problemas en tiempo continuo. Su objetivo es encontrar una función (la trayectoria) que maximice o minimice una cantidad acumulada a lo largo del tiempo.

1.2 El Funcional: El Corazón del Problema

Para medir el ”valor” de una trayectoria completa, necesitamos un nuevo objeto matemático: el **funcional**. Mientras que una *función* toma un número y devuelve otro número (ej: $f(x) = x^2$), un *funcional* toma una función entera y devuelve un número.

Definición 1.1: Funcional Objetivo

n funcional, denotado como $V[y(\cdot)]$, es una regla que asigna un valor numérico a cada función $y(t)$ perteneciente a un conjunto de funciones admisibles. En optimización dinámica, típicamente adopta la forma de una integral definida:

$$V[y(\cdot)] = \int_{t_0}^{T} F\big(t, y(t), y'(t)\big)\, dt \tag{1}$$

donde:

- t es la variable de etapa, usualmente el tiempo, que va de un inicio t_0 a un final T.
- $y(t)$ es la **variable de estado**, que describe la situación del sistema en el tiempo t.
- $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ es la **variable de control** o de flujo, que representa la tasa de cambio del estado.
- $F(t, y, y')$ es la **función Lagrangiana** o integrando, que define el valor (beneficio, costo, utilidad) instantáneo en cada punto de la trayectoria.

El problema fundamental del Cálculo de Variaciones consiste en encontrar la función $y(t)$ que maximice o minimice este funcional, sujeta a que la trayectoria comience en un punto conocido y termine en otro.

$$\max_{y(t)} \text{ o } \min_{y(t)} \quad V[y(t)] = \int_{t_0}^{T} F\big(t, y(t), y'(t)\big)\, dt \quad \text{s.a.} \quad y(t_0) = A, \quad y(T) = Z \tag{2}$$

Las condiciones $y(t_0) = A$ y $y(T) = Z$ son las **condiciones de contorno** o de frontera.

1.3 Analogía Intuitiva: Planificación de un Viaje

Imaginemos que queremos viajar de una ciudad A a una ciudad Z en un tiempo determinado.

- Una decisión **miópica** sería, en cada instante, tomar la dirección que nos acerca más rápidamente al destino, sin importar si nos lleva por caminos con mucho tráfico, peajes costosos o terreno peligroso más adelante.
- Una decisión de **optimización dinámica** implica trazar la ruta completa en el mapa antes de salir. Se elige el camino que minimiza el costo total del viaje (una combinación de tiempo, combustible, peajes), internalizando todas las etapas del recorrido desde el principio.

El funcional $V[y(\cdot)]$ sería el costo total del viaje, y la trayectoria $y(t)$ sería la ruta elegida. El Cálculo de Variaciones nos da las herramientas para encontrar esa ruta óptima.

1.4 Problema de Consolidación

Pregunta: En el contexto de una empresa que decide su nivel de inversión a lo largo de una década, ¿qué representan t, $y(t)$, $y'(t)$ y F en el funcional Equation (1)?

Solución:

1. **Etapa (t):** El tiempo, medido en años, desde el año 0 hasta el año 10.
2. **Estado ($y(t)$):** El stock de capital de la empresa en el año t.
3. **Control ($y'(t)$):** La tasa de inversión neta en el año t. Es la derivada del stock de capital.
4. **Lagrangiana (F):** El flujo de beneficio instantáneo en el año t, que depende del capital existente (y) y de la inversión que se realiza (y').

2 La Ecuación de Euler-Lagrange: Condición de Optimalidad

2.1 El Principio de Variación

¿Cómo encontramos la trayectoria $y^*(t)$ que optimiza el funcional? La idea central, análoga al cálculo diferencial, es que si estamos en un máximo o un mínimo, cualquier pequeña

desviación o "variación" de la trayectoria óptima no debería cambiar el valor del funcional en primer orden.

Imaginemos la trayectoria óptima $y^*(t)$. Ahora, creemos una trayectoria "vecina" perturbándola ligeramente con una función arbitraria $p(t)$ que se anula en los extremos (para seguir respetando las condiciones de contorno). La trayectoria perturbada es $y(t) = y^*(t) + \epsilon p(t)$, donde ϵ es un número pequeño.

La condición de optimalidad es que la derivada del funcional con respecto a ϵ sea cero cuando $\epsilon = 0$. Este razonamiento conduce directamente a la condición necesaria para un extremo, conocida como la Ecuación de Euler-Lagrange.

Teorema 2.1: Ecuación de Euler-Lagrange (Forma Compacta)

oda función $y(t)$ que sea dos veces continuamente diferenciable y que extremice el funcional $V[y(\cdot)]$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial para todo $t \in [t_0, T]$:

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0} \tag{3}$$

Donde $F_y \equiv \frac{\partial F}{\partial y}$ es la derivada parcial del Lagrangiano con respecto al nivel, y $F_{y'} \equiv \frac{\partial F}{\partial y'}$ es la derivada parcial con respecto a la tasa de cambio.

Esta ecuación es la piedra angular del Cálculo de Variaciones. Su solución nos da la familia de trayectorias candidatas a ser óptimas. Luego, usamos las condiciones de contorno para seleccionar la única trayectoria de esa familia que conecta los puntos de inicio y fin.

2.2 Casos Especiales de la Ecuación de Euler

Resolver la Ecuación de Euler puede ser complejo. Sin embargo, en algunas situaciones, su estructura se simplifica enormemente.

Caso 1: F no depende de y (es decir, $F = F(t, y')$) Si el valor instantáneo no depende del nivel de la variable de estado, entonces $F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$. La Ecuación de Euler se reduce a:

$$-\frac{d}{dt}F_{y'} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{y'} = C \tag{4}$$

donde C es una constante. Esto significa que la sensibilidad del Lagrangiano a la pendiente de la trayectoria debe permanecer constante a lo largo del camino óptimo. Esto simplifica mucho la integración.

Caso 2: F no depende de t (es decir, $F = F(y, y')$) Si el problema es autónomo (no depende explícitamente del tiempo), se puede demostrar que existe una integral primera de la Ecuación de Euler, conocida como la **Identidad de Beltrami**:

$$F - y'F_{y'} = C \tag{5}$$

donde C es una constante. Esta forma puede ser más fácil de resolver que la Ecuación de

Euler original.

2.3 Problema de Consolidación

Pregunta: El problema de encontrar la distancia más corta entre dos puntos en un plano puede formularse como minimizar el funcional de longitud de arco $V[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$. ¿A qué caso especial pertenece este problema y qué implica para $F_{y'}$?

Solución:

1. **Análisis del Lagrangiano:** El integrando es $F(y') = \sqrt{1+(y')^2}$. Observamos que F no depende ni de y ni explícitamente de la variable de integración x (que juega el papel de t).
2. **Identificación del Caso:** Como F no depende de y, estamos en el **Caso 1**.
3. **Aplicación de la Simplificación:** La Ecuación de Euler implica que $F_{y'}$ debe ser constante:
$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right) = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$
4. **Interpretación:** Resolver esta ecuación para y' muestra que y' debe ser constante, lo que significa que la solución es una línea recta, como era de esperar.

3 Deducción y Forma Expandida de la Ecuación de Euler

3.1 El Camino Formal: De la Variación a la Ecuación Diferencial

La deducción formal de la Ecuación de Euler es un proceso elegante que transforma una condición global (la integral de la variación debe ser cero) en una condición local (una ecuación diferencial que debe cumplirse en cada punto).

Paso 1: Perturbar y Derivar Consideramos la trayectoria óptima $y^*(t)$ y la perturbamos: $y(t,\epsilon) = y^*(t) + \epsilon p(t)$, donde $p(t_0) = p(T) = 0$. El valor del funcional se convierte en una función de ϵ:
$$V(\epsilon) = \int_{t_0}^{T} F(t, y^*(t) + \epsilon p(t), y'^*(t) + \epsilon p'(t))\,dt$$
Para que y^* sea un extremo, la derivada de $V(\epsilon)$ evaluada en $\epsilon = 0$ debe ser cero. Usando la regla de la cadena (Regla de Leibniz para la diferenciación bajo el signo de integral):
$$\left.\frac{dV}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_0}^{T} \left[F_y \cdot p(t) + F_{y'} \cdot p'(t)\right] dt = 0$$

Paso 2: Integración por Partes El problema es que la condición involucra tanto a $p(t)$ como a su derivada $p'(t)$. Para unificarla, aplicamos integración por partes al segundo término: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Sea $u = F_{y'}$ y $dv = p'(t)dt$. Entonces $du = \frac{d}{dt}(F_{y'})dt$ y $v = p(t)$.
$$\int_{t_0}^{T} F_{y'}p'(t)dt = \left[F_{y'}p(t)\right]_{t_0}^{T} - \int_{t_0}^{T} p(t)\frac{d}{dt}(F_{y'})dt$$

Como $p(t)$ se anula en las fronteras ($p(t_0) = p(T) = 0$), el primer término es cero.

Paso 3: El Argumento Final (Lema Fundamental) Sustituyendo el resultado de la integración por partes en la condición del Paso 1, podemos sacar $p(t)$ como factor común:

$$\int_{t_0}^{T} \left[F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} \right] p(t)\, dt = 0$$

Esta ecuación debe ser válida para *cualquier* función de perturbación $p(t)$ (que cumpla las condiciones). El **Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones** establece que si una integral de este tipo es cero para toda función $p(t)$, entonces el término que multiplica a $p(t)$ debe ser idénticamente cero en todo el intervalo. De ahí, se concluye que:

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0$$

3.2 La Ecuación de Euler en Forma Desarrollada

La forma compacta $F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0$ es elegante, pero oculta la verdadera naturaleza de la ecuación. Para revelarla, debemos expandir la derivada total $\frac{d}{dt} F_{y'}$. Recordemos que $F_{y'}$ es, en general, una función de t, $y(t)$, y $y'(t)$. Por lo tanto, su derivada total con respecto a t se calcula usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} F_{y'} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial t} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} y'' \tag{6}$$

Usando una notación más compacta:

$$\frac{d}{dt} F_{y'} = F_{ty'} + F_{yy'} y' + F_{y'y'} y''$$

Sustituyendo esta expansión en la forma compacta de Euler, obtenemos la **forma desarrollada**:

$$\boxed{F_y - (F_{ty'} + F_{yy'} y' + F_{y'y'} y'') = 0} \tag{7}$$

Esta forma deja claro que la Ecuación de Euler es, en general, una **ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden**, debido a la presencia del término y''. Esto explica por qué necesitamos dos condiciones de contorno para determinar una solución única.

4 Aplicación Práctica 1: Minimización

4.1 Planteamiento del Problema

Consideremos el problema de encontrar la curva $y(t)$ que une los puntos $(0, 0)$ y $(2, 8)$ y que minimiza el siguiente funcional:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^2 \Big[(y'(t))^2 + 12ty(t) \Big] dt \quad \text{s.a.} \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 8$$

El integrando penaliza tanto una pendiente elevada (y'^2) como una interacción entre el nivel y el tiempo ($12ty$).

4.2 Resolución Paso a Paso

Seguiremos un proceso metodológico en tres fases:

1. **Aplicar Euler:** Deducir la EDO que gobierna las trayectorias candidatas.
2. **Resolver la EDO:** Encontrar la solución general de la EDO.
3. **Aplicar Condiciones de Contorno:** Usar las fronteras para encontrar las constantes de integración y definir la trayectoria óptima.

Paso 1: Aplicar la Ecuación de Euler

- **Identificar F:** $F(t, y, y') = (y')^2 + 12ty$.
- **Calcular derivadas parciales:**

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 12t$$
$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

- **Sustituir en la forma compacta de Euler $F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0$:**

$$12t - \frac{d}{dt}(2y') = 0$$

$$12t - 2y'' = 0$$

- **EDO resultante:**

$$y''(t) = 6t \tag{8}$$

Paso 2: Resolver la Ecuación Diferencial

- **Primera integración:** Integramos $y''(t)$ con respecto a t para hallar $y'(t)$.

$$y'(t) = \int 6t\, dt = 3t^2 + C_1$$

- **Segunda integración:** Integramos $y'(t)$ para hallar la solución general $y(t)$.

$$y(t) = \int (3t^2 + C_1)\, dt = t^3 + C_1 t + C_2$$

Paso 3: Aplicar Condiciones de Contorno

- **Usar $y(0) = 0$ para hallar C_2:**

$$y(0) = (0)^3 + C_1(0) + C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 0$$

- **Usar $y(2) = 8$ para hallar C_1:** Conociendo $C_2 = 0$, la solución es $y(t) = t^3 + C_1 t$.

$$y(2) = (2)^3 + C_1(2) = 8 \quad \Longrightarrow \quad 8 + 2C_1 = 8 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0$$

Trayectoria Óptima Candidata: La única trayectoria que satisface la condición de Euler y las condiciones de frontera es:

$$\mathbf{y^*(t) = t^3} \tag{9}$$

4.3 Verificación de Suficiencia: La Condición de Legendre

La Ecuación de Euler es una condición necesaria, no suficiente. Nos da un punto estacionario, que podría ser un mínimo, un máximo o un punto de silla. Para verificar que hemos encontrado un **mínimo**, necesitamos una condición de segundo orden. La más simple es la **Condición de Legendre**.

Definición 4.1: Condición de Legendre

ara que una trayectoria $y^*(t)$ sea un:

- **Mínimo local**, es necesario que $F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \geq 0$ a lo largo de la trayectoria.
- **Máximo local**, es necesario que $F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \leq 0$ a lo largo de la trayectoria.

Esta condición está relacionada con la convexidad/concavidad del Lagrangiano con respecto a y'.

Para nuestro ejemplo:

$$F_{y'} = 2y' \quad \Longrightarrow \quad F_{y'y'} = \frac{\partial}{\partial y'}(2y') = 2$$

Dado que $F_{y'y'} = 2 > 0$ para todo el dominio, la condición de Legendre para un mínimo se cumple estrictamente. Por lo tanto, podemos concluir que $y^*(t) = t^3$ es, en efecto, una trayectoria que **minimiza** el funcional.

5 Aplicación Práctica 2: Maximización

5.1 Planteamiento del Problema

Ahora buscaremos la trayectoria que une $(1, 3)$ y $(5, 7)$ y que **maximiza** el siguiente funcional:

$$\mathcal{J}[y] = \int_1^5 \left[-(y'(t) - 1)^2 \right] dt \quad \text{s.a.} \quad y(1) = 3, \quad y(5) = 7$$

Intuitivamente, el integrando es siempre negativo o cero. Para maximizar la integral, querremos que el término $(y'(t) - 1)^2$ sea lo más pequeño posible en todo momento,

idealmente cero. Esto sugiere que la pendiente óptima debería ser $y' = 1$. Veamos si el formalismo de Euler confirma esta intuición.

5.2 Resolución Paso a Paso

Paso 1: Aplicar la Ecuación de Euler

- **Identificar F:** $F(t, y, y') = -(y' - 1)^2$. Notamos que F no depende de y.
- **Calcular derivadas parciales:**

$$F_y = 0$$
$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = -2(y' - 1) \cdot 1 = -2y' + 2$$

- **Sustituir en Euler $F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0$:**

$$0 - \frac{d}{dt}(-2y' + 2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(-2y') = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2y'' = 0$$

- **EDO resultante:**

$$y''(t) = 0 \tag{10}$$

  Esto confirma que la aceleración de la trayectoria óptima debe ser cero, lo que implica una velocidad (pendiente) constante.

Paso 2: Resolver la Ecuación Diferencial

- La solución general de $y'' = 0$ es una línea recta:

$$y(t) = C_1 t + C_2$$

Paso 3: Aplicar Condiciones de Contorno

- Formamos un sistema de dos ecuaciones lineales con las dos condiciones de frontera:

$$y(1) = C_1(1) + C_2 = 3 \tag{11}$$
$$y(5) = C_1(5) + C_2 = 7 \tag{12}$$

- **Resolución del sistema:** Restando Equation (11) de Equation (12):

$$(5C_1 - C_1) + (C_2 - C_2) = 7 - 3$$

$$4C_1 = 4 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 1$$

- Sustituyendo $C_1 = 1$ en Equation (11):

$$1 + C_2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 2$$

Trayectoria Óptima Candidata: La trayectoria óptima es la línea recta:

$$\mathbf{y}^*(\mathbf{t}) = \mathbf{t} + \mathbf{2} \tag{13}$$

Notemos que la pendiente de esta recta es $y' = 1$, lo que coincide con nuestra intuición inicial.

5.3 Verificación de Suficiencia para un Máximo

Aplicamos nuevamente la Condición de Legendre, esta vez para un máximo ($F_{y'y'} \leq 0$).

$$F_{y'} = -2y' + 2 \quad \Longrightarrow \quad F_{y'y'} = \frac{\partial}{\partial y'}(-2y' + 2) = -2$$

Dado que $F_{y'y'} = -2 < 0$, la condición de Legendre para un máximo se cumple estrictamente. La trayectoria $y^*(t) = t + 2$ efectivamente **maximiza** el funcional.

5.4 Problema de Consolidación Final

Pregunta: Considere el funcional del Section 5, pero ahora buscando **minimizar** $\mathcal{I}[y] = \int_1^5 (y'(t) - 1)^2 \, dt$ con las mismas fronteras. ¿Sigue siendo $y^*(t) = t + 2$ la trayectoria óptima? Verifíquelo formalmente.

Solución Escalonada:

1. **Análisis de Euler:** El nuevo Lagrangiano es $F = (y' - 1)^2$. Las derivadas parciales son $F_y = 0$ y $F_{y'} = 2(y' - 1)$. La Ecuación de Euler es $-\frac{d}{dt}(2(y' - 1)) = 0$, que nuevamente conduce a la EDO $y'' = 0$.

2. **Solución de la EDO:** La solución general sigue siendo $y(t) = C_1 t + C_2$.

3. **Condiciones de Contorno:** Las fronteras son las mismas, por lo que las constantes son $C_1 = 1$ y $C_2 = 2$. La trayectoria candidata es la misma: $y^*(t) = t + 2$.

4. **Verificación de Suficiencia (para un mínimo):** Calculamos $F_{y'y'}$.

$$F_{y'} = 2(y' - 1) \quad \Longrightarrow \quad F_{y'y'} = \frac{\partial}{\partial y'}(2y' - 2) = 2$$

5. **Conclusión:** Como $F_{y'y'} = 2 > 0$, la Condición de Legendre para un mínimo se cumple. Por lo tanto, la misma trayectoria lineal $y^*(t) = t + 2$ es ahora un **mínimo estricto** del nuevo funcional. Esto ilustra cómo la naturaleza del extremo (máximo o mínimo) depende crucialmente de la forma del Lagrangiano.

De un Punto a un Camino Completo

La **Optimización Dinámica** aborda el desafío de tomar decisiones óptimas a lo largo de un período de tiempo, considerando el **período de planificación completo**. Se diferencia crucialmente de la optimización miópica o estática, que solo busca un valor óptimo en un único punto o etapa.

El **Cálculo de Variaciones (CV)** es la herramienta fundamental para resolver estos problemas en tiempo continuo. Su objetivo es identificar la **trayectoria** ($y(t)$) que maximice o minimice un criterio acumulado, típicamente expresado como una integral.

A continuación, se presentan las 5 ideas centrales que definen este poderoso marco analítico.

Las 5 Ideas Centrales del Cálculo de Variaciones

1. El Objetivo es una Trayectoria, no un Número: El Funcional

En el corazón del Cálculo de Variaciones se encuentra el **funcional**. Un funcional es una aplicación que toma una función o trayectoria completa ($y(t)$) y le asigna un único valor numérico (costo, beneficio o utilidad total).

El problema fundamental es extremar este funcional, que generalmente toma la forma de una integral definida:

$$V[y(\cdot)] = \int_{t_0}^{T} F\big(t, y(t), y'(t)\big)\, dt$$

Aquí, $F(t, y, y')$ es la densidad integranda (o Lagrangiana), que define el costo o beneficio instantáneo. La optimización dinámica busca el **camino óptimo** completo, en lugar de un único valor óptimo estático.

2. La Ley Universal de los Caminos Óptimos: La Ecuación de Euler

¿Cómo se encuentra el camino óptimo entre infinitas posibilidades? La respuesta es la **Ecuación de Euler-Lagrange**. Esta es la condición necesaria básica de primer orden que debe satisfacer cualquier trayectoria suave (y^*) que minimice o maximice el funcional.

La intuición detrás de esta ecuación es el **Principio de Variación**: si una trayectoria es óptima, una pequeña perturbación o "variación" de esa senda no debe cambiar el valor del funcional en primer orden. Esto, tras un proceso de derivación e integración por partes, conduce a la EDO central:

$$\mathbf{F_y} - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\mathbf{F_{y'}}\right) = \mathbf{0} \quad \forall t \in [t_0, T]$$

Esta ecuación transforma el problema variacional original en una **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de segundo orden** que debe resolverse para encontrar la trayectoria candidata.

3. Las Condiciones de Contorno Fijan la Senda Única

Debido a que la Ecuación de Euler es, generalmente, una EDO de segundo orden, su solución general ($y(t)$) contendrá **dos constantes arbitrarias** (C_1 y C_2).

Para fijar los valores únicos de estas constantes, se utilizan las **condiciones de contorno** (o de frontera), que definen el punto inicial y terminal de la trayectoria: $y(t_0) = A$ y $y(T) = Z$. Al aplicar estas dos condiciones a la solución general, se forma un sistema de ecuaciones que permite determinar C_1 y C_2, obteniendo la **trayectoria óptima candidata** específica ($y^*(t)$).

4. El Candidato Debe Ser Certificado: La Condición de Legendre

La Ecuación de Euler solo proporciona una condición **necesaria**, es decir, identifica a los candidatos que podrían ser extremos (máximos o mínimos). Para confirmar la naturaleza del extremo, se requiere una **condición de suficiencia** de segundo orden.

La **Condición de Legendre** evalúa la curvatura del integrando (F) respecto a la velocidad (y'):

- Para un **Mínimo**: Se requiere que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \geq 0$.
- Para un **Máximo**: Se requiere que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \leq 0$.

Por ejemplo, si el problema busca minimizar y se encuentra que $\partial^2 F/\partial (y')^2 = 2 > 0$ (como en el Ejemplo 1), se confirma la suficiencia para un mínimo. Si el problema busca maximizar y se encuentra $\partial^2 F/\partial (y')^2 = -2 < 0$ (como en el Ejemplo 2), se confirma la suficiencia para un máximo.

5. La Simplicidad de la Recta y la Complejidad Curva

Los ejemplos canónicos del Cálculo de Variaciones demuestran que las soluciones óptimas a menudo validan la intuición geométrica.

- **La Recta Óptima** (Ejemplo 2): En problemas donde el integrando solo penaliza la desviación de la pendiente (es decir, F no depende de y y se simplifica Euler a $y'' = 0$), la trayectoria óptima es la línea recta que une los extremos fijos ($y^*(t) = t + 2$), ya que esta es la curva con **curvatura nula** que minimiza el "esfuerzo" o maximiza la suavidad.
- **La Curva Dinámica** (Ejemplo 1): Cuando el integrando sí depende explícitamente del tiempo (t) y/o del nivel (y), la EDO es más compleja (por ejemplo, $y''(t) = 6t$). La solución resultante, como $y^*(t) = t^3$, equilibra el costo de cambiar la trayectoria con el "empuje" dinámico impuesto por el integrando en función del tiempo.

Conclusión

El Cálculo de Variaciones proporciona una metodología rigurosa y sistemática para la **optimización intertemporal**. El flujo de trabajo para hallar el camino perfecto es claro: plantear el funcional, aplicar la Ecuación de Euler para obtener la EDO, integrar y usar las condiciones de contorno para fijar las constantes de integración, y finalmente, usar la Condición de Legendre para verificar la suficiencia del extremo hallado. Este marco se extiende a campos avanzados como el **Control Óptimo** y es indispensable para modelar decisiones dinámicas en la economía, la física y la ingeniería

Red Conceptual

- **Resumen breve y categorizado**
  - **Optimización Dinámica:** Implica tomar decisiones óptimas a lo largo de un período de tiempo completo, considerando el período de planificación completo, a diferencia de la optimización miópica que evalúa una etapa a la vez. Busca identificar un camino óptimo o secuencia de estados a lo largo del tiempo.
  - **Cálculo de Variaciones (CV):** Es la herramienta fundamental para la optimización dinámica en tiempo continuo. Su objetivo es extremar (maximizar o minimizar) el valor de un funcional.
  - **Funcional Objetivo:** El objeto central es un funcional que toma la forma de una integral definida (trayectoria completa) y se formula como $V[y(\cdot)] = \int_{t_0}^{T} F(t, y, y')dt$, sujeto a condiciones de contorno fijas.
  - **Condición Necesaria:** La piedra angular del método es la Ecuación de Euler-Lagrange, una condición necesaria de primer orden que transforma el problema variacional en una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de segundo orden.
- **Conceptos principales**
  - **Funcional ($V[y]$ o $J[y]$):** Una aplicación que asigna un valor numérico (costo, beneficio, utilidad acumulada) a una trayectoria o función completa.
  - **Integrando (F o Lagrangiano):** La función $F(t, y, y')$ dentro de la integral que define el costo o beneficio instantáneo.
  - **Variables Clave:**
    - **Etapa (t):** Variable independiente, a menudo representa el tiempo.
    - **Estado ($y(t)$):** La condición o posición del sistema cuya trayectoria se busca optimizar.
    - **Senda ($y'(t)$):** La derivada, que representa la "velocidad" o tasa de cambio del estado.
  - **Funciones Admisibles:** Curvas continuas con derivadas continuas (suaves) que satisfacen las condiciones de contorno dadas. Se requiere que el integrando F sea al menos dos veces diferenciable.
  - **Condiciones de Contorno:** Restricciones que fijan los puntos de inicio $y(t_0) = A$ y el terminal $y(T) = Z$, necesarias para definir las constantes de integración de la EDO de Euler.
- **Axiomas/postulados**
  - **Principio de Variación:** En una trayectoria óptima (y^*), una pequeña perturbación ($\epsilon p(t)$) no debe cambiar el valor del funcional en primer orden ($\frac{dV}{d\epsilon}\big|_{\epsilon=0} = 0$).

  - **Anulación del Término de Borde:** La función de prueba $p(t)$ debe respetar las condiciones de frontera, por lo que $p(0) = 0$ y $p(T) = 0$. Esto garantiza que el término de frontera que surge de la integración por partes se anule.
  - **Principio de Arbitrariedad (Lema Fundamental del CV):** La condición integral $\int_0^T \left[F_y - \frac{d}{dt}F_{y'}\right] p(t)dt = 0$ debe cumplirse para cualquier función arbitraria $p(t)$. Esto postula que la expresión entre corchetes debe ser idénticamente cero, lo que lleva a la Ecuación de Euler.

- **Relaciones y aplicaciones clave**

  - **Ecuación de Euler ($F_y - \frac{d}{dt}F_{y'}=0$):** Es la condición necesaria de primer orden para encontrar un extremo estacionario. Es una EDO de segundo orden.
  - **Forma Expandida de Euler:** $F_{y'y'}y''(t) + F_{yy'}y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0$. Esta forma explicita cómo las sensibilidades de F al tiempo, al nivel y a la velocidad influyen en la curvatura óptima (y'').
  - **Condición de Legendre (Suficiencia):** Condición de segundo orden clave para verificar la naturaleza del extremo:
    * Para **Mínimo**: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$.
    * Para **Máximo**: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0$.
  - **Casos Especiales (Leyes de Conservación):** Si el integrando F no depende explícitamente de la variable de estado y ($F = F(t, y')$), la Ecuación de Euler se simplifica a $\frac{d}{dt}F_{y'} = 0$, implicando que $\frac{\partial F}{\partial y'}$ debe ser una constante a lo largo de la trayectoria óptima.
  - **Vínculo con Control Óptimo:** El Cálculo de Variaciones es la base del Control Óptimo (Principio del Máximo de Pontryagin), que generaliza el método para incluir variables de control explícitas y restricciones.
  - **Aplicaciones:** Economía dinámica (trayectorias de consumo-ahorro, inversión óptima, ajustes de precios), física (principios de mínima acción) e ingeniería (perfiles de mínima energía).

- **Secuencia lógica desarrollada del cálculo del tema**

  - **Paso 1: Aplicación de la Ecuación de Euler (Condición Necesaria)**
    1. Identificar el integrando $F(t, y, y')$ y las condiciones de contorno $y(t_0) = A$, $y(T) = Z$.
    2. Calcular las derivadas parciales de F respecto al estado (F_y) y la senda ($F_{y'}$).
    3. Sustituir en la Ecuación de Euler $F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0$ para obtener la EDO específica. (Ejemplo 1 $\rightarrow y''(t) = 6t$; Ejemplo 2 $\rightarrow y''(t) = 0$).
  - **Paso 2: Resolución de la EDO y Determinación de la Trayectoria**
    1. Integrar la EDO resultante (generalmente de segundo orden) dos veces para obtener la solución general $y(t) = g(t, C_1, C_2)$.

2. Aplicar las dos condiciones de contorno dadas para establecer un sistema de ecuaciones lineales que resuelva las constantes arbitrarias C_1 y C_2.
3. Obtener la trayectoria óptima candidata $y^*(t)$. (Ejemplo 1 $\rightarrow$ $y^*(t) = t^3$; Ejemplo 2 $\rightarrow$ $y^*(t) = t + 2$).

– **Paso 3: Verificación de Suficiencia (Condición de Legendre)**

1. Calcular la segunda derivada parcial $F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$.
2. Evaluar si se cumple la Condición de Legendre a lo largo de $y^*(t)$: $F_{y'y'} \geq 0$ (Mínimo) o $F_{y'y'} \leq 0$ (Máximo), confirmando la naturaleza del extremo.

Control Óptimo Continuo: Teoría y Aplicaciones

@toobaziti

1 de enero de 2022

Aclaración Importante

Este material fue generado con herramientas de IA a partir de la grabación de la clase, la presentación y los textos recomendados. Durante este proceso, la calidad del audio o posibles interrupciones pueden dar lugar a imprecisiones. Por esta razón, el documento debe ser considerado una guía de estudio y no un sustituto de las fuentes originales. Para confirmar cualquier información, por favor, remítase a ellas.

Índice

1 El Problema de Optimización Dinámica **4**
1.1 Componentes Formales del Problema 4

2 La Receta: El Principio de Máximo de Pontryagin (PMP) **4**
2.1 El Hamiltoniano: El ”Tablero de Control” 5
2.2 El Precio Sombra (λ) 5
2.3 Problemas No Autónomos y el Hamiltoniano Corriente (H_c) 5

3 Las 4 Condiciones del PMP (La Receta) **5**
3.0.1 (i) Maximización del Hamiltoniano 6
3.0.2 (ii) Ecuación de Estado 6
3.0.3 (iii) Ecuación de Co-Estado (Arbitraje) 6
3.0.4 (iv) Condición de Transversalidad 6

4 El Final del Juego: Condiciones de Transversalidad **6**

5 ¿Es Realmente la Solución Óptima? (Suficiencia) **7**

6 Proceso de Resolución y Diagramas de Fases **8**
6.1 Proceso de Resolución (Paso a Paso) 8
6.2 Análisis con Diagrama de Fases 8

7 Caso 1:Análisis de un Juego Económico de Control Óptimo: Conflicto y Asignación de Recursos **8**
7.1 El Andamiaje Teórico: Conceptos Fundamentales 9
7.2 Formulación del Modelo 10
7.3 Controles y Restricciones 10
7.4 Ecuación de Estado y Objetivos 10
7.5 Aplicación del Principio de Máximo 10
7.6 El Problema del Trabajador (Maximizar J_1) 11
7.7 El Problema del Capitalista (Maximizar J_2) 11
7.8 Análisis de Equilibrios Compatibles 12
7.9 Conclusión 13

8 Caso 2: Análisis de un Problema de Optimización Dinámica (Modelo de Crecimiento con Ahorro) **13**
8.1 Resumen de Conceptos Fundamentales 14
8.2 Mapa de Relaciones: El Flujo Lógico 14
8.3 Mapa Conceptual Básico 15
8.4 Procesos y Desarrollos (Paso a Paso) 16
8.5 Paso 1: El Planteo del Problema 16
8.6 Paso 2: El Hamiltoniano (La ”Receta”) 16
8.7 Paso 3: Las ”Reglas del Juego” (CPO) 17
8.8 Paso 4: La Ecuación de Euler (El Piloto Automático del Consumo) 17
8.9 Paso 5: Diagrama de Fases y Estabilidad 18
8.10 Paso 6: Suficiencia (¿Es esta la *mejor* solución?) 20

9 Caso 3: Análisis de Optimización Dinámica Modelo de Gestión de un Recurso Renovable **20**
9.1 Glosario de Conceptos Fundamentales . . . 20
9.2 El Flujo de Trabajo: De la Pregunta a la Solución . . . 21
9.3 Mapa Conceptual Simplificado . . . 22
9.4 Desarrollo Analítico Paso a Paso . . . 23
9.5 Paso 1: El Planteo Formal del Problema . . . 23
9.5.1 El Objetivo: Maximizar V . . . 23
9.5.2 La Restricción: Ecuación de Movimiento . . . 24
9.6 Pasos 2 y 3: Construir la Función Hamiltoniana . . . 24
9.7 Paso 4: Deducir las Condiciones de Primer Orden (Las Reglas) . . . 24
9.8 Paso 5: Hallar la Ecuación de Euler . . . 25
9.9 Paso 6: Armar el Sistema Dinámico . . . 26
9.10 Paso 7: Construir el Diagrama de Fases (El Mapa) . . . 26
9.10.1 Curva $= 0$ (Stock constante) . . . 26
9.10.2 Curva $= 0$ (Consumo constante) . . . 26
9.11 Paso 8: Evaluar la Dinámica del Sistema (Las Flechas) . . . 27
9.12 Paso 9: Verificar las Condiciones de Suficiencia . . . 27
9.13 Conclusión Final . . . 27

10 Mapa Conceptual **29**
10.1 Los Pilares del Problema: Conceptos Fundamentales . . . 29
10.2 Variable de Control (u(t) o c(t)) . . . 29
10.3 Variable de Estado (y(t) o k(t)) . . . 30
10.4 Función Objetivo (V) . . . 30
10.5 Ecuación de Movimiento (= f(.)) . . . 30
10.6 El Hamiltoniano (H) . . . 30
10.7 Variable de Coestado (lambda(t) o mu(t)) . . . 30
10.8 Hamiltoniano en Valor Corriente (H_c) . . . 31
10.9 Ecuación de Euler ($\dot{u}$ o $\dot{c}$) . . . 31
10.10 El Método: El Principio del Máximo de Pontryagin (PMP) . . . 31
10.11 Condiciones Necesarias (CPMP) . . . 31
10.12 Condiciones de Suficiencia . . . 32
10.13 Análisis de la Solución y Relaciones Clave . . . 32
10.14 La Condición de Arbitraje (Ecuación de $\dot{\mu}$) . . . 32
10.15 Diagrama de Fases y la Senda de Ensilladura . . . 32
10.16 Condiciones de Transversalidad (CT) Específicas . . . 33
10.17 Aplicaciones Ejemplares . . . 33
10.18 Guía Práctica: Secuencia de Solución . . . 34

1 El Problema de Optimización Dinámica

En lugar de optimizar una decisión en un solo punto en el tiempo (optimización estática), la optimización dinámica busca encontrar la **mejor trayectoria** o **plan de acción** a lo largo de un período.

Pensemos en la analogía de un viaje en coche.

- **Objetivo:** Quieres maximizar tu ”felicidad” total durante un viaje de 8 horas (tiempo T).
- **Decisión (Control):** En cada segundo t, decides cuánto pisar el acelerador. Esta es tu **variable de control**, $u(t)$.
- **Situación (Estado):** Tu decisión afecta la cantidad de gasolina que te queda en el tanque. Esta es tu **variable de estado**, $y(t)$.
- **Reglas (Física):** Existe una regla que conecta tu decisión con tu estado. Por ejemplo: ”el cambio en la gasolina ($\dot{y}$) es igual a menos lo que aceleras ($-u$)”. Esta es la **ecuación de movimiento**, $\dot{y} = f(t, y, u)$.

El problema de control óptimo (PCO) consiste en encontrar la estrategia perfecta para pisar el acelerador ($u^*(t)$) que maximice la suma total de tu felicidad, respetando las reglas de cómo se gasta la gasolina.

1.1 Componentes Formales del Problema

Formalmente, un PCO busca maximizar una **función objetivo** (o funcional) V, que es la integral de una función de beneficios F a lo largo del tiempo, sujeta a la ”física” del sistema.

$$\max_{u(t)} V = \int_0^T F(t, y(t), u(t))dt$$

Sujeto a:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) \qquad \text{(Ecuación de movimiento)}$$
$$y(0) = y_0 \qquad \text{(Condición inicial)}$$

Donde:

- t: El tiempo.
- $y(t)$: La(s) variable(s) de estado (el ”stock”, el capital, la población de peces).
- $u(t)$: La(s) variable(s) de control (la ”decisión”, el consumo, la inversión, el esfuerzo de pesca).
- $F(\cdot)$: La función de beneficio o utilidad instantánea.
- $f(\cdot)$: La función de movimiento que describe la dinámica del estado.

2 La Receta: El Principio de Máximo de Pontryagin (PMP)

Resolver esto directamente es muy complejo. El matemático Lev Pontryagin desarrolló una ”receta mágica”, el **Principio de Máximo (PMP)**, que proporciona un conjunto de condiciones *necesarias* que cualquier trayectoria óptima debe cumplir.

La herramienta central de esta receta es el **Hamiltoniano (H)**.

2.1 El Hamiltoniano: El ”Tablero de Control”

El Hamiltoniano es una ”súper-función” que actúa como el tablero de control de nuestro problema. En lugar de maximizar la integral V (difícil), el PMP nos dice que simplemente debemos maximizar el Hamiltoniano H en *cada instante* t.

El Hamiltoniano combina el placer actual con el valor futuro de nuestras acciones:

$$H = \underbrace{F(t, y, u)}_{\text{Valor actual}} + \underbrace{\lambda(t) \cdot f(t, y, u)}_{\text{Valor futuro}}$$

Aquí, $\lambda(t)$ (lambda) es la nueva variable estrella: la **variable de co-estado** o **precio sombra**.

2.2 El Precio Sombra (λ)

Este es el concepto más importante. El precio sombra $\lambda(t)$ mide el **valor marginal de la variable de estado**.

Intuición: $\lambda(t)$ nos dice: ”¿cuánto aumentaría nuestra felicidad total V si, en el instante t, alguien nos regalara mágicamente una unidad más de estado y (ej. 1L extra de gasolina, 1 pez más en el mar)?”

El Hamiltoniano, por lo tanto, se lee así:

$$H = (\text{Felicidad de hoy}) + (\text{Valor de 1 unidad de estado}) \times (\text{Cambio en el estado})$$

2.3 Problemas No Autónomos y el Hamiltoniano Corriente (H_c)

En economía, rara vez valoramos igual la felicidad hoy que mañana. Somos impacientes. Modelamos esto con una **tasa de descuento** ρ (rho). El objetivo se convierte en:

$$\max V = \int_0^T G(y, u) e^{-\rho t} dt$$

Aquí, $G(y, u)$ es la utilidad ”corriente” (del momento) y $e^{-\rho t}$ la descuenta a valor presente. Este es un problema **No Autónomo** porque el tiempo t aparece explícitamente.

Trabajar con esto es complicado. Por ello, se define el **Hamiltoniano en Valor Corriente** (H_c o H_{vp}), que ”saca” el descuento del problema.

Definimos un nuevo precio sombra en valor corriente, $\mu(t) = \lambda(t)e^{\rho t}$, y el Hamiltoniano Corriente es:

$$H_c = He^{\rho t} = G(y, u) + \mu(t) \cdot f(y, u)$$

Esta es la formulación más usada en economía.

3 Las 4 Condiciones del PMP (La Receta)

Para que una trayectoria $(y^*(t), u^*(t))$ sea óptima, debe existir una variable de co-estado $\mu(t)$ tal que se cumplan las siguientes cuatro condiciones:

3.0.1 (i) Maximización del Hamiltoniano

En cada instante t, la variable de control $u^*(t)$ debe ser elegida para maximizar el Hamiltoniano Corriente H_c, dadas $y(t)$ y $\mu(t)$.

Si u no está restringido, esto se reduce a la condición de primer orden (CPO):

$$\frac{\partial H_c}{\partial u} = 0$$

Intuición: Esta es la regla de oro. Transforma el problema dinámico en una serie de optimizaciones estáticas (maximizar H_c en cada t).

3.0.2 (ii) Ecuación de Estado

La dinámica de la variable de estado debe respetar la "física" del sistema. (Matemáticamente, es solo una CPO sobre μ).

$$\dot{y} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} \quad (= f(y, u))$$

3.0.3 (iii) Ecuación de Co-Estado (Arbitraje)

Esta es la regla más importante. Nos dice cómo debe cambiar el "precio sombra" μ en el tiempo.

$$\dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H_c}{\partial y}$$

Intuición (La Ecuación de Oro): Esta es una condición de arbitraje. Reordenando:

$$\rho\mu = \dot{\mu} + \frac{\partial H_c}{\partial y}$$

- **Lado Izquierdo ($\rho\mu$):** El "Costo de Oportunidad". Si tu estado y vale μ, podrías "venderlo" y poner el dinero μ en el banco, ganando un interés $\rho\mu$.
- **Lado Derecho ($\dot{\mu} + \frac{\partial H_c}{\partial y}$):** El "Retorno Total de Mantener el Estado". Se compone de:
  - $\frac{\partial H_c}{\partial y}$: La ganancia directa que te da el estado (su "dividendo" o "productividad").
  - $\dot{\mu}$: La ganancia (o pérdida) de capital por el cambio en el valor del propio estado.

La ecuación dice que, en la trayectoria óptima, el retorno de "invertir en el banco" debe ser igual al retorno total de "invertir en el estado".

3.0.4 (iv) Condición de Transversalidad

Esta es la "regla del final del juego". Nos da la condición de frontera necesaria para cerrar el sistema en el tiempo T. Esta condición depende de cómo sea el final del problema.

4 El Final del Juego: Condiciones de Transversalidad

Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ($\dot{y}$ y $\dot{\mu}$), necesitamos dos condiciones de frontera: una al inicio ($y(0) = y_0$) y una al final. La condición de transversalidad es la del final.

La siguiente tabla (basada en el material fuente) resume los casos más comunes para un problema con horizonte **finito** T.

Cuadro 1: Condiciones de Transversalidad (Horizonte Finito T)

Tipo de Problema	Datos del Problema	Condición de Transversalidad
Punto Terminal Fijo *(Llega a Miami el día 30)*	T fijo, $y(T) = y_T$ fijo	Ninguna (el estado ya está fijo).
Terminal Vertical *(La carrera acaba el día 30, no importa dónde estés)*	T fijo, $y(T)$ libre	$\mu(T) = 0$ *Intuición:* Si el stock final $y(T)$ no *vale nada, su precio $\mu(T)$ es cero.*
Terminal Horizontal *(Llega a Miami, tómate el tiempo que quieras)*	T libre, $y(T) = y_T$ fijo	$H_c(T) = 0$ *Intuición:* Paras en el instante T en *que el "valor de continuar" (H_c) se agota.*
Vertical Truncada *(Acaba el día 30 con al menos 10L de gasolina)*	T fijo, $y(T) \geq y_{min}$	$\mu(T) \geq 0$ $\mu(T) \cdot [y(T) - y_{min}] = 0$ *(Holgura complementaria)*
Horizontal Truncada *(Llega a Miami antes de que cierre el día 30)*	$T \leq T_{max}$, $y(T) = y_T$ fijo	$H_c(T) \geq 0$ $H_c(T) \cdot [T - T_{max}] = 0$ *(Holgura complementaria)*

Horizonte Infinito ($T \to \infty$): En problemas económicos, es común usar un horizonte infinito. La condición de transversalidad se convierte en:

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t)y(t) = 0 \quad \text{(o, más formal, } \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mu(t)y(t) = 0\text{)}$$

Intuición: No puedes terminar el "juego" con una cantidad de "deuda" o "valor" infinitamente grande. El valor descontado de tu estado final debe ser cero.

5 ¿Es Realmente la Solución Óptima? (Suficiencia)

El PMP solo da condiciones **necesarias**. Son como un mapa que te dice "las cimas candidatas están aquí". Pero, ¿encontraste la cima más alta (máximo global) o solo una colina local, o incluso un valle (mínimo)?

Las **Condiciones de Suficiencia** nos garantizan que la solución encontrada es el máximo global. La condición clave es la **concavidad**.

- **Condición de Mangasarian:** Si las funciones base del problema (F o G, y f) son cóncavas en (y, u), entonces cualquier solución que cumpla el PMP es un máximo global.
- **Condición de Arrow:** Una condición más general. Si el *Hamiltoniano Maximizado* $\hat{H}(t, y, \mu) = \max_u H_c(t, y, u, \mu)$ es una función cóncava en la variable de estado y, entonces la solución es un máximo global.

Intuición: Si el problema tiene forma de "colina" (cóncavo), cualquier punto que encuentres en la cima (donde las derivadas son cero) *tiene* que ser el punto más alto.

6 Proceso de Resolución y Diagramas de Fases

En la práctica, especialmente en economía, el objetivo es encontrar la **Ecuación de Euler** y analizar el sistema dinámico.

6.1 Proceso de Resolución (Paso a Paso)

1. **Identificar** las partes: $G(y,u)$, $f(y,u)$, ρ, y las condiciones de frontera. 2. **Plantear** el Hamiltoniano Corriente $H_c = G + \mu f$. 3. **Aplicar** las 3 CPO principales:

1. $\frac{\partial H_c}{\partial u} = 0 \implies$ (Esto da una relación entre u, y, μ).
2. $\dot{y} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} \implies$ (Esto da la ecuación para $\dot{y}$).
3. $\dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H_c}{\partial y} \implies$ (Esto da la ecuación para $\dot{\mu}$).

4. **Derivar la Ecuación de Euler:** Usar la CPO (1) para despejar μ. Derivar esa expresión respecto al tiempo t para obtener una fórmula para $\dot{\mu}$. 5. Igualar las dos fórmulas de $\dot{\mu}$ (la del paso 3 y la del paso 4). Sustituir μ de nuevo usando la CPO (1). 6. El resultado es una ecuación para $\dot{u}$ (o $\dot{c}$) que solo depende de u e y. 7. **Formar el Sistema:** Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones diferenciales: una para $\dot{y}$ y una para $\dot{u}$.

6.2 Análisis con Diagrama de Fases

La mejor forma de entender este sistema es con un **Diagrama de Fases**.

- Es un ”mapa” con la variable de estado (k o y) en el eje X y la variable de control (c o u) en el eje Y.
- Se dibujan las **curvas de demarcación** (o nulclinas):
  - La curva $\dot{y} = 0$: Muestra dónde el estado se mantiene constante.
  - La curva $\dot{u} = 0$: Muestra dónde el control se mantiene constante.
- El cruce de estas curvas es el **Estado Estacionario** (el equilibrio de largo plazo).
- Se analizan las ”flechas” de movimiento en las 4 regiones del diagrama.
- En muchos modelos económicos (como Ramsey o Recursos), el equilibrio es un **Punto de Silla**. Esto significa que hay una única trayectoria (la **senda estable** o ”senda de silla”) que lleva al equilibrio.
- La solución óptima consiste en ”saltar” a esa senda estable y seguirla hasta el estado estacionario.

7 Caso 1:Análisis de un Juego Económico de Control Óptimo: Conflicto y Asignación de Recursos

Imaginemos una economía simplificada donde la producción total depende de un único factor: el **stock de capital** existente (k), es decir, las fábricas, máquinas y herramientas disponibles. En cada instante t, esta economía genera una producción total, que podemos visualizar como una ”torta”.

En términos formales, esta producción sigue una función lineal simple:

$$P(t) = a \cdot k(t)$$

donde a es un parámetro fijo que representa la productividad del capital.

El núcleo del problema reside en cómo se distribuye esta ”torta”. En este modelo, dos grupos o agentes compiten por ella:

1. **Trabajadores:** Su objetivo es maximizar su consumo.
2. **Capitalistas:** Su objetivo es maximizar su propio consumo.

Sin embargo, sus decisiones están interconectadas y en conflicto, ya que la producción que no se consume puede ser **invertida** para aumentar el stock de capital (k). Más capital mañana significa una ”torta” más grande mañana, pero a costa de consumir menos hoy. Este es un ”juego” dinámico que se desarrolla a lo largo de un período de tiempo, de $t = 0$ a $t = T$.

Para resolver esta tensión, utilizamos una poderosa herramienta matemática: la **Teoría del Control Óptimo**.

7.1 El Andamiaje Teórico: Conceptos Fundamentales

Antes de formular el modelo, es esencial definir los conceptos clave del Control Óptimo:

- **Variable de Estado ($k(t)$):** Es la ”memoria” del sistema. Describe la situación de la economía en cualquier instante. Aquí, es el **stock de capital**. Su valor futuro depende de las decisiones tomadas hoy.
- **Variables de Control (u_1, u_2):** Son las ”palancas” o decisiones que los agentes pueden ajustar en cada momento.
  - $u_1(t)$: Decisión del trabajador (qué porcentaje de la producción consumir).
  - $u_2(t)$: Decisión del capitalista (qué porcentaje del excedente invertir).
- **Ecuación de Estado ($\dot{k}(t)$):** Es la ley de movimiento o ”física” del sistema. Describe cómo cambia la variable de estado en el tiempo. $\dot{k}$ (léase ”k-punto”) es la tasa de cambio del capital, que en este modelo es sinónimo de inversión neta.
- **Principio de Máximo de Pontryagin:** Es la ”receta” matemática para encontrar las trayectorias óptimas de las variables de control (u^*) que maximizan un objetivo (una integral) sujeto a la ecuación de estado.
- **Hamiltoniano (H):** Es una función auxiliar crucial en el Principio de Máximo. En cada instante t, H encapsula el ”valor” total de estar en un estado k y tomar una decisión u. Se compone de dos partes:

$$H = (\text{Utilidad inmediata}) + \lambda \cdot (\text{Ecuación de Estado})$$

- **Variable de Coestado ($\lambda(t)$):** Este es el concepto más abstracto, a veces llamado ”precio sombra” o variable adjunta. Intuitivamente, $\lambda(t)$ mide el **valor marginal** de la variable de estado (k) en el instante t. Nos indica cuánto aumentaría nuestro objetivo total (la integral J) si, en ese instante, tuviéramos mágicamente una unidad adicional de capital. Es el valor de k medido en unidades de J.

- **Solución "Bang-Bang":** Ocurre cuando la estrategia óptima no es un punto intermedio, sino que siempre se sitúa en uno de los **extremos** (máximo o mínimo) del rango permitido para la variable de control. Es análogo a un interruptor: o está totalmente encendido (máximo) o totalmente apagado (mínimo).

7.2 Formulación del Modelo

Definamos formalmente las reglas del "juego". La producción total es $P(t) = ak(t)$.

7.3 Controles y Restricciones

- **Control del Trabajador (u_1):** El trabajador elige u_1, la fracción de la producción que consume. Está restringido a un rango: $u_1(t) \in [c, b]$, donde c es un consumo mínimo de subsistencia y b es un máximo (con $0 < c \leq b < 1$).
  - Consumo del Trabajador: $C_T(t) = ak(t)u_1(t)$.
- **El "Excedente":** Después del consumo del trabajador, queda un excedente:

$$E(t) = P(t) - C_T(t) = ak(t)(1 - u_1(t))$$

- **Control del Capitalista (u_2):** El capitalista decide qué fracción de *ese excedente* ($E(t)$) se destinará a inversión. Está restringido a $u_2(t) \in [0, 1]$.
  - Inversión ($I(t)$): $I(t) = E(t) \cdot u_2(t) = ak(t)(1 - u_1(t))u_2(t)$.
  - Consumo del Capitalista ($C_K(t)$): $C_K(t) = E(t) \cdot (1 - u_2(t)) = ak(t)(1 - u_1(t))(1 - u_2(t))$.

7.4 Ecuación de Estado y Objetivos

La variable de estado (capital k) solo cambia con la inversión. Por lo tanto, la ecuación de estado es:

$$\dot{k}(t) = I(t) = ak(t)(1 - u_1(t))u_2(t)$$

con una condición inicial $k(0) = k_0$.

Los objetivos (funcionales a maximizar) son las integrales de sus respectivos consumos:

$$J_1 = \int_0^T ak(t)u_1(t)dt \quad \text{(Objetivo del Trabajador)}$$

$$J_2 = \int_0^T ak(t)(1 - u_1(t))(1 - u_2(t))dt \quad \text{(Objetivo del Capitalista)}$$

7.5 Aplicación del Principio de Máximo

Cada agente resuelve su propio problema de control óptimo, tratando la decisión del otro como dada.

7.6 El Problema del Trabajador (Maximizar J_1)

El trabajador controla u_1 para maximizar J_1. Construimos su Hamiltoniano (H_1), usando λ_1 como su variable de coestado:

$$H_1 = (\text{Utilidad Inmediata}) + \lambda_1 \cdot (\dot{k})$$

$$H_1 = ak(t)u_1 + \lambda_1 \cdot [ak(t)(1-u_1)u_2]$$

El Principio de Máximo establece que el trabajador debe elegir $u_1 \in [c, b]$ para maximizar H_1 en todo momento. Para ver cómo u_1 afecta a H_1, reagrupamos los términos que contienen u_1:

$$H_1 = (ak\lambda_1 u_2) + u_1 \cdot [ak - ak\lambda_1 u_2]$$

$$H_1 = (\text{Términos fijos para } u_1) + u_1 \cdot \underbrace{[ak(1-\lambda_1 u_2)]}_{\text{Término de Conmutación } \Phi_1}$$

H_1 es una **función lineal** de u_1. Su máximo en el intervalo $[c, b]$ dependerá exclusivamente del signo de la pendiente (Φ_1).

- **Si** $\Phi_1 > 0$ **(es decir,** $1 - \lambda_1 u_2 > 0 \implies \lambda_1 u_2 < 1$**):** La pendiente es positiva. Para maximizar H_1, el trabajador elige el valor más alto posible: $\mathbf{u_1^* = b}$. *Intuición:* El "pago" por consumir (1) es mayor que el "pago" por invertir (ponderado por $\lambda_1 u_2$). Por lo tanto, consume al máximo.
- **Si** $\Phi_1 < 0$ **(es decir,** $1 - \lambda_1 u_2 < 0 \implies \lambda_1 u_2 > 1$**):** La pendiente es negativa. Para maximizar H_1, el trabajador elige el valor más bajo posible: $\mathbf{u_1^* = c}$. *Intuición:* El valor de la inversión (reflejado en $\lambda_1 u_2$) es tan alto que es preferible "ceder" producción a la inversión (consumiendo menos) para maximizar el objetivo a largo plazo.

Esta es una solución **Bang-Bang**.

7.7 El Problema del Capitalista (Maximizar J_2)

El capitalista controla u_2 para maximizar J_2. Construimos su Hamiltoniano (H_2) con su coestado λ_2:

$$H_2 = (\text{Utilidad Inmediata}) + \lambda_2 \cdot (\dot{k})$$

$$H_2 = ak(1-u_1)(1-u_2) + \lambda_2 \cdot [ak(1-u_1)u_2]$$

Reagrupamos los términos que contienen u_2 (recordando que $ak(1-u_1)$ es el excedente E, que es positivo):

$$H_2 = ak(1-u_1) - ak(1-u_1)u_2 + \lambda_2 ak(1-u_1)u_2$$

$$H_2 = (\text{Términos fijos para } u_2) + u_2 \cdot \underbrace{[ak(1-u_1)(\lambda_2 - 1)]}_{\text{Término de Conmutación } \Phi_2}$$

Nuevamente, H_2 es una **función lineal** de u_2. El signo de la pendiente Φ_2 depende únicamente del término $(\lambda_2 - 1)$.

- **Si** $\Phi_2 > 0$ **(es decir,** $\lambda_2 - 1 > 0 \implies \lambda_2 > 1$**):** La pendiente es positiva. Para maximizar H_2, el capitalista elige el valor más alto posible: $\mathbf{u_2^* = 1}$. *Intuición:* Si $\lambda_2 > 1$, el "precio sombra" del capital es mayor que 1. Esto significa que **1 unidad de capital mañana vale más que 1**

unidad de consumo hoy. La estrategia óptima es invertir al máximo (100% del excedente) y no consumir nada.

- **Si $\Phi_2 < 0$ (es decir, $\lambda_2 - 1 < 0 \implies \lambda_2 < 1$):** La pendiente es negativa. Para maximizar H_2, el capitalista elige el valor más bajo posible: $\mathbf{u_2^* = 0}$. *Intuición:* Si $\lambda_2 < 1$, **1 unidad de capital mañana vale menos que 1 unidad de consumo hoy**. El capitalista prefiere consumir el 100% del excedente y no invertir nada.

Esta también es una solución **Bang-Bang**.

7.8 Análisis de Equilibrios Compatibles

Las soluciones óptimas dependen de las variables de coestado (λ_1, λ_2), las cuales evolucionan en el tiempo. Sin embargo, podemos analizar la consistencia de las cuatro combinaciones "Bang-Bang" posibles:

Caso I: $u_1^* = c$ **(min) y** $u_2^* = 0$ **(min)**
- $u_1^* = c$ requiere $\lambda_1 u_2 > 1$.
- Si $u_2^* = 0$, la condición se vuelve $\lambda_1 \cdot 0 > 1$, es decir, $0 > 1$.
- Esto es una contradicción matemática. **Este caso es imposible.**

Caso II: $u_1^* = b$ **(max) y** $u_2^* = 0$ **(min)**
- $u_1^* = b$ requiere $\lambda_1 u_2 < 1$. Si $u_2^* = 0 \implies 0 < 1$. (Consistente).
- $u_2^* = 0$ requiere $\lambda_2 < 1$. (Consistente).
- **Descripción:** Los trabajadores exigen su consumo máximo (b). En respuesta, los capitalistas deciden invertir lo mínimo (0) y consumir todo el excedente.
- **Resultado:** $\dot{k} = ak(1-b)\cdot 0 = 0$. La inversión es nula. La economía se estanca (crecimiento cero). Se le conoce como la **"Tregua de Consumo"**.

Caso III: $u_1^* = c$ **(min) y** $u_2^* = 1$ **(max)**
- $u_1^* = c$ requiere $\lambda_1 u_2 > 1$. Si $u_2^* = 1 \implies \lambda_1 > 1$. (Consistente).
- $u_2^* = 1$ requiere $\lambda_2 > 1$. (Consistente).
- **Descripción:** Los trabajadores son forzados a su consumo mínimo (c). Los capitalistas responden invirtiendo al máximo (1) y no consumen nada.
- **Resultado:** $\dot{k} = ak(1-c)\cdot 1 =$ Máximo. La inversión es máxima. La economía crece a la tasa más rápida posible, a costa de la austeridad presente. Se le conoce como el **"Conflicto de Inversión"** o "Acumulación Máxima".

Caso IV: $u_1^* = b$ **(max) y** $u_2^* = 1$ **(max)**
- $u_1^* = b$ requiere $\lambda_1 u_2 < 1$. Si $u_2^* = 1 \implies \lambda_1 < 1$. (Consistente).
- $u_2^* = 1$ requiere $\lambda_2 > 1$. (Consistente).
- **Descripción:** Este caso (consumo máximo del trabajador e inversión máxima del capitalista) es matemáticamente posible bajo estas condiciones. Sin embargo, a menudo se descarta en análisis más profundos, ya que puede ser incompatible con las dinámicas de las propias variables de coestado (las ecuaciones $\dot{\lambda}(t)$) o no ser un equilibrio estable a largo plazo.

7.9 Conclusión

El análisis de este modelo de control óptimo revela un conflicto estructural e irreconciliable en la asignación de recursos. La naturaleza lineal del problema, que conduce a soluciones ”Bang-Bang”, demuestra que las estrategias de ”consenso” o puntos intermedios no son óptimas bajo este marco.

El sistema tiende a dos polos:

1. Una ”Tregua de Consumo” (Caso II), donde se prioriza el bienestar presente (alto consumo de ambos agentes) a costa del estancamiento económico (crecimiento cero).

2. Un ”Conflicto de Inversión” (Caso III), donde se prioriza la acumulación de capital (crecimiento máximo) a costa de la austeridad y el consumo mínimo en el presente.

La elección entre estos equilibrios depende de las condiciones iniciales y de la evolución de los ”precios sombra” (λ_1, λ_2), que reflejan el valor que cada agente asigna al capital futuro frente al consumo presente.

8 Caso 2: Análisis de un Problema de Optimización Dinámica (Modelo de Crecimiento con Ahorro)

Lo que has presentado es un ejemplo canónico de **Control Óptimo**, una herramienta matemática indispensable en la economía moderna, las finanzas y la ingeniería.

Pensemos en esto de forma intuitiva. El problema que resolvemos es el de un agente económico (una persona, una familia o incluso un país) que debe tomar una decisión continua a lo largo del tiempo: **¿cuánto consumir hoy y cuánto ahorrar (invertir en capital k) para poder consumir mañana?**

Este es el *trade-off* (disyuntiva) fundamental del crecimiento:

- **Si consumes mucho hoy**, obtienes una gran satisfacción (utilidad) inmediata. Sin embargo, tu *stock* de capital k no crece, o incluso se reduce, lo que significa que mañana tendrás menos capacidad de producir y, por ende, menos para consumir.

- **Si consumes poco hoy (ahorras mucho)**, tu satisfacción inmediata es menor. Pero esta decisión permite que tu capital k crezca (acumule), lo que te permitirá generar más producción y disfrutar de un consumo mucho mayor en el futuro.

El ”Control Óptimo” es el andamiaje matemático que nos permite encontrar el **balance perfecto** en esta decisión, instante a instante, para maximizar la felicidad o **utilidad total** acumulada a lo largo de todo el horizonte de planificación (desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = T$).

A continuación, se presenta el análisis completo, explicado conceptual y analíticamente.

8.1 Resumen de Conceptos Fundamentales

Para abordar el problema, primero definamos a nuestros "actores":

1. **Variable de Control (c):** Es la "palanca" que el agente puede ajustar en cualquier instante t. Es la variable de decisión activa e instantánea. *En este caso: el nivel de **Consumo (c_t)**.*
2. **Variable de Estado (k):** Es la variable que resume la historia de las decisiones pasadas. No se puede cambiar de golpe; su valor en t está dado, y solo podemos influir en cómo *cambia* ($\dot{k}$) a través de nuestra variable de control. *En este caso: el **Capital (k_t)**.*
3. **Función Objetivo (El Funcional $\int \dots dt$):** Es la cantidad que deseamos maximizar. Aquí, es la **utilidad total**, que es la suma ($\int$) de la utilidad de cada instante (c^α), descontada al presente por un factor de impaciencia ($e^{-\delta t}$).
4. **Ecuación de Movimiento ($\dot{k} = \dots$):** Es la "ley de la física" del modelo. Es una ecuación diferencial que nos dice exactamente cómo cambia la variable de estado ($\dot{k}$) en respuesta a nuestras decisiones (c) y al estado actual (k).
5. **Hamiltoniano (H):** Es la "súper-función" que construimos para resolver el problema. Es la herramienta central del control óptimo. Su genialidad radica en que convierte un problema de optimización *restringido* (maximizar la utilidad *sujeto a* la ecuación de movimiento) en un problema que se parece a una optimización *sin restricciones*.

   Combina:

   - Lo que queremos maximizar (la utilidad: c^α).
   - La restricción de movimiento (la dinámica de $\dot{k}$).
   - Un "precio sombra" (μ) que valora la restricción.
6. **Variable de Co-Estado (μ):** Conocida como el "precio sombra" o multiplicador dinámico. Es una variable auxiliar crucial. Su interpretación económica es: **el valor (en unidades de utilidad) de tener una unidad adicional de la variable de estado (capital k) en el instante t**. Nos dice cuánta felicidad extra total obtendríamos si alguien nos regalara un peso más de capital en ese momento.
7. **Diagrama de Fases:** Es el "mapa" del sistema. Es un gráfico que nos muestra, desde cualquier combinación de capital (k) y consumo (c), hacia dónde nos llevarán las "fuerzas" del sistema (las ecuaciones $\dot{k}$ y $\dot{c}$). Nos permite estudiar el equilibrio y su **estabilidad**.

8.2 Mapa de Relaciones: El Flujo Lógico

El flujo para resolver uno de estos problemas es muy metódico:

1. Partimos del **Problema de Optimización** (maximizar la utilidad sujeta a la acumulación de capital).
2. Para resolverlo, "empaquetamos" toda la información en una sola función: el **Hamiltoniano** (generalmente, el Hamiltoniano en Valor Corriente, H_c, por ser algebraicamente más simple).
3. Invocamos el **Principio del Máximo de Pontryagin**. Esta es la regla central del control óptimo, análoga a "derivar e igualar a cero" del cálculo estático.

4. Este principio nos da un conjunto de "reglas de oro" matemáticas llamadas **Condiciones de Primer Orden (CPO)**.
5. Estas CPO son 3 (o más) ecuaciones que nos describen cómo deben comportarse c, k y el precio sombra μ en la trayectoria óptima.
6. Manipulamos algebraicamente estas reglas (específicamente, las de c y μ) para encontrar una ecuación clave: la **Ecuación de Euler**. Esta ecuación nos da la *tasa de crecimiento* óptima de nuestro consumo ($\dot{c}$).
7. Juntamos la Ecuación de Euler ($\dot{c}$) con la Ecuación de Movimiento ($\dot{k}$) para formar un **Sistema de Ecuaciones Diferenciales** Autónomo de 2x2.
8. Analizamos este sistema usando un **Diagrama de Fases** para entender su comportamiento en el largo plazo (el *estado estacionario*) y, lo más importante, su **Estabilidad**.
9. Finalmente, verificamos las **Condiciones de Suficiencia** (usualmente, las de Mangasarian) para asegurarnos de que la solución encontrada es realmente un **máximo** (la mejor senda) y no un mínimo (la peor) o un punto silla.

8.3 Mapa Conceptual Básico

- **PROBLEMA: Maximizar Utilidad del Consumo en el Tiempo**
  - **OBJETIVO:** max $\int_0^T c(t)^\alpha e^{-\delta t} dt$
    - (Felicidad 'c' elevada a 'α', descontada por impaciencia 'δ')
  - **RESTRICCIÓN:** $\dot{k} = (r - \theta)k - c$
    - (El cambio en capital '$\dot{k}$' es lo que rinde $(r - \theta)k$ menos lo que consumo 'c')
- **HERRAMIENTA: Principio del Máximo (Control Óptimo)**
  - **1. Armar el Hamiltoniano** (en Valor Corriente, H_c)
    - (Mezcla el Objetivo (sin descuento) + μ· Restricción)
  - **2. Obtener Condiciones de Primer Orden (CPO)**
    - (1) $\frac{\partial H_c}{\partial c} = 0$ (Regla para el Consumo óptimo)
    - (2) $\frac{\partial H_c}{\partial \mu} = \dot{k}$ (Regla de movimiento del Capital)
    - (3) $-\frac{\partial H_c}{\partial k} = \dot{\mu} - \delta\mu$ (Regla de movimiento del "Precio Sombra" μ)
- **ANÁLISIS: Dinámica del Sistema**
  - **1. Combinar (1) y (3)** $\implies$ **Ecuación de Euler** (fórmula para $\dot{c}$)
    - (Nos dice cómo debe crecer el consumo)
  - **2. Armar Sistema Dinámico** (con $\dot{c}$ y $\dot{k}$)
  - **3. Analizar con Diagrama de Fases**
    - (Dibujar las líneas $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$ para ver el mapa)
- **RESULTADO: Condiciones para una Solución Estable**
  - (La dinámica de $\dot{c}$ debe ser estable)
  - **CONDICIÓN FINAL:** $\delta > r - \theta$
    - (La impaciencia 'δ' debe ser mayor que el retorno neto del capital '$r - \theta$')

8.4 Procesos y Desarrollos (Paso a Paso)

Vamos a recorrer el problema, explicando el significado de cada paso analítico.

8.5 Paso 1: El Planteo del Problema

Función Objetivo

$$\max \int_0^T c^\alpha e^{-\delta t} dt \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

- c^α **(con** $0 < \alpha < 1$**):** Esta es tu "función de felicidad" (utilidad instantánea). El hecho de que α sea menor que 1 es la clave de toda la economía. Significa que la función es **cóncava** (como una colina $\cap$) y presenta **utilidad marginal decreciente**.
- *Intuición:* Comer la primera porción de pizza te da +10 de felicidad (Utilidad Marginal). La segunda te da +8. La octava te da solo +1. Cada unidad extra de consumo te hace más feliz ($U' > 0$), pero *menos* que la anterior ($U'' < 0$).
- $e^{-\delta t}$**:** Este es el **factor de descuento**. δ (delta) es tu **tasa de impaciencia** o "tasa de descuento subjetiva". Si δ es alta, eres muy impaciente y valoras mucho más la felicidad de hoy que la de mañana. Si $\delta = 0$, valoras por igual la felicidad de hoy y la de cualquier día futuro.

Restricción (Ecuación de Movimiento)

$$\dot{k} = (r - \theta)k - c$$

- $\dot{k}$**:** Es la notación de Newton para la derivada temporal, $\frac{dk}{dt}$. Es el *cambio* en tu capital en un instante.
- $(r - \theta)k$**:** Es lo que "produce" tu capital. r es la tasa de interés o retorno bruto, y θ (theta) es la tasa de depreciación. Por lo tanto, $(r - \theta)$ es el **retorno neto** de tu capital.
- $-c$**:** Es lo que "sacas" del sistema para consumir.
- *Intuición:* Tu *stock* de dinero/capital (k) crece según su retorno neto, menos lo que gastas (c).

8.6 Paso 2: El Hamiltoniano (La "Receta")

Para resolver esto, usamos el **Hamiltoniano en Valor Corriente** (H_c), que es más sencillo porque ya "saca" el factor $e^{-\delta t}$ de la ecuación.

$$H_c = \underbrace{c^\alpha}_{\text{Lo que quiero}} + \underbrace{\mu}_{\text{El "precio"}} \cdot \underbrace{[(r - \theta)k - c]}_{\text{La restricción}}$$

- μ **(mu):** Es la variable de co-estado o "precio sombra".
- *Intuición (Repetida):* μ_t te dice **cuánta felicidad total extra ganarías si mágicamente te regalaran una unidad más de capital (**k**) en este preciso instante** t. Es el valor (en unidades de utilidad) de tener un peso más invertido.

8.7 Paso 3: Las "Reglas del Juego" (CPO)

El Principio del Máximo de Pontryagin nos da tres reglas que *deben* cumplirse en la senda óptima:

1. $\frac{\partial H_c}{\partial c} = 0 \implies \alpha c^{\alpha-1} - \mu = 0 \implies \boxed{\mu = \alpha c^{\alpha-1}}$
   - *Explicación:* Esta es la regla de oro del consumo. $\alpha c^{\alpha-1}$ es la "utilidad marginal del consumo" (la felicidad que te da el último peso que consumiste). μ es el "costo de oportunidad" (la felicidad futura que pierdes, valorada en μ, por no haber invertido ese peso).
   - *Intuición (La Regla de la Pizza):* En el punto óptimo, **la felicidad que te da comerte la última porción de pizza ($\alpha c^{\alpha-1}$) debe ser exactamente igual a la felicidad que te habría dado ahorrar el dinero de esa porción (μ)**.
2. $\frac{\partial H_c}{\partial \mu} = \dot{k} \implies \boxed{\dot{k} = (r-\theta)k - c}$
   - *Explicación:* Esto simplemente nos dice "no te olvides de cumplir la restricción". Nos devuelve la ecuación de movimiento del capital.
3. $-\frac{\partial H_c}{\partial k} = \dot{\mu} - \delta\mu$
   - *Explicación:* Esta es la regla más compleja. Nos dice cómo debe cambiar el "precio sombra" μ en el tiempo.
   - *Derivación:*
     - Primero, calculamos la derivada: $\frac{\partial H_c}{\partial k} = \mu(r-\theta)$.
     - Sustituimos en la regla: $-\mu(r-\theta) = \dot{\mu} - \delta\mu$.
     - Reordenamos para despejar $\dot{\mu}$: $\dot{\mu} = \delta\mu - \mu(r-\theta)$.
     - $\boxed{\dot{\mu} = \mu[\delta - (r-\theta)]}$
   - *Intuición:* El cambio en el valor de tu capital ($\dot{\mu}$) depende de dos fuerzas. Dividiendo por μ, vemos que la *tasa de cambio* del precio sombra ($\dot{\mu}/\mu$) es:
     - δ **(Impaciencia):** Quieres tu felicidad ahora. Esto hace que el valor de tener capital (que es para el futuro) *disminuya* con el tiempo (es un costo de esperar).
     - $-(r-\theta)$ **(Rentabilidad):** Tu capital "trabaja" para ti y genera un retorno neto $(r-\theta)$. Esto hace que el valor de tenerlo *aumente*.
     - La fórmula nos dice que la tasa de cambio del precio sombra es la impaciencia *menos* el retorno neto del capital.

8.8 Paso 4: La Ecuación de Euler (El Piloto Automático del Consumo)

Objetivo: Queremos una fórmula que nos diga cómo debe crecer el consumo ($\dot{c}$) por sí solo, eliminando el precio sombra μ.

Procedimiento (Elegante, usando log-derivación):

(a) Tomamos la CPO (1): $\mu = \alpha c^{\alpha-1}$

(b) Aplicamos logaritmo natural a ambos lados: $\ln(\mu) = \ln(\alpha) + (\alpha-1)\ln(c)$

(c) Derivamos toda la ecuación con respecto al tiempo t (usando la regla de la cadena):

$$\frac{d}{dt}[\ln(\mu)] = \frac{d}{dt}[\ln(\alpha) + (\alpha-1)\ln(c)]$$

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = 0 + (\alpha - 1)\frac{\dot{c}}{c}$$

(d) De la CPO (3), ya teníamos otra fórmula para $\frac{\dot{\mu}}{\mu}$:

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \delta - (r - \theta)$$

(e) Ahora igualamos ambas expresiones:

$$(\alpha - 1)\frac{\dot{c}}{c} = \delta - (r - \theta)$$

(f) Despejamos la tasa de crecimiento del consumo $\frac{\dot{c}}{c}$:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\delta - (r - \theta)}{\alpha - 1}$$

(g) (Multiplicando numerador y denominador por -1 para que sea más intuitivo):

$$\boxed{\frac{\dot{c}}{c} = \frac{(r - \theta) - \delta}{1 - \alpha}}$$

Intuición Económica de la Ecuación de Euler

Esta es la Ecuación de Euler. El término $\frac{1}{1-\alpha}$ es la **Elasticidad de Sustitución Intertemporal** (σ). Así que la regla es:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma \cdot [(r - \theta) - \delta]$$

- $(r - \theta)$**:** Es el ”premio” por ahorrar (retorno neto real).
- δ**:** Es el ”costo” de ahorrar (tu impaciencia).
- *La regla dice:* La tasa de crecimiento de tu consumo debe ser proporcional a la diferencia entre el premio por ahorrar y el costo de ahorrar.
  - Si el retorno $(r - \theta) > \delta$, el ahorro es muy atractivo. La regla te dice $\dot{c} > 0$ (el consumo debe crecer). Ahorras hoy para consumir mucho más mañana.
  - Si el retorno $(r - \theta) < \delta$, eres demasiado impaciente. El ahorro no compensa. La regla te dice $\dot{c} < 0$ (el consumo debe decrecer). Consumes mucho hoy, sabiendo que mañana serás más pobre.

8.9 Paso 5: Diagrama de Fases y Estabilidad

Objetivo: Dibujar el ”mapa” en el plano (k, c) para ver hacia dónde se mueve el sistema.

Paso 5.1: El Sistema Dinámico. Tenemos nuestras dos ecuaciones de movimiento:

$$\dot{c} = c\left(\frac{(r - \theta) - \delta}{1 - \alpha}\right)$$
$$\dot{k} = (r - \theta)k - c$$

Paso 5.2: Las ”Fronteras” (Isoclinas). Buscamos las líneas donde las variables se detienen.

- **Frontera $\dot{k} = 0$:** ¿Cuándo deja de cambiar el capital?

$$\dot{k} = 0 \implies (r-\theta)k - c = 0 \implies \boxed{c = (r-\theta)k}$$

  Interpretación: Esta es una **línea recta que pasa por el origen (0,0)** con pendiente $(r-\theta)$. Si estás *sobre* esta línea, tu consumo es exactamente igual a lo que tu capital produce. Por lo tanto, tu capital se mantiene estable.

- **Frontera $\dot{c} = 0$:** ¿Cuándo deja de cambiar el consumo?

$$\dot{c} = 0 \implies c\left(\frac{(r-\theta)-\delta}{1-\alpha}\right) = 0$$

  Interpretación: Esto solo ocurre si $\boxed{c = 0}$ (el eje horizontal k). (O si $(r-\theta) = \delta$, en cuyo caso $\dot{c} = 0$ en todas partes, pero asumamos que no es el caso).

Paso 5.3: Las "Flechas" (Análisis de Estabilidad). Analicemos el caso que se muestra en la imagen, que es el económicamente más común: **la condición de estabilidad** $\delta > r - \theta$.

- **Movimiento Vertical ($\dot{c}$):**
  - Si $\delta > r - \theta$, el numerador de la Ecuación de Euler, $(r-\theta)-\delta$, es **negativo**.
  - El denominador $1-\alpha$ es **positivo**.
  - Por lo tanto, la tasa $\dot{c}/c$ es **negativa**.
  - *Resultado:* Siempre que $c > 0$ (en cualquier lugar por encima del eje k), el consumo **disminuye** (flecha $\downarrow$).
- **Movimiento Horizontal ($\dot{k}$):**
  - *Por encima* de la línea $\dot{k} = 0$, $c > (r-\theta)k$. Estás consumiendo *más* de lo que produce tu capital. Por lo tanto, tu capital k disminuye (flecha $\leftarrow$).
  - *Por debajo* de la línea $\dot{k} = 0$, $c < (r-\theta)k$. Estás consumiendo *menos*. Tu capital k aumenta (flecha $\rightarrow$).
- **Conclusión del Mapa:** El único punto de equilibrio (donde $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$ se cruzan) es el origen **(0, 0)**. El análisis de flechas ($\leftarrow$ y $\downarrow$ arriba de la línea, $\rightarrow$ y $\downarrow$ abajo) muestra que **todas las trayectorias convergen al (0, 0)**, que es un **punto de silla estable**. Hay un único camino (la "senda estable") que nos lleva al equilibrio.

Intuición Económica CLAVE (de la condición $\delta > r - \theta$):

- δ es tu **Impaciencia**.
- $r - \theta$ es el **Retorno Neto de tu Capital**.
- La condición $\delta > r - \theta$ significa que **debes ser más impaciente que el retorno de tu inversión**.
- *¿Por qué?* Pensemos en lo contrario: si el retorno $(r-\theta)$ fuera *mayor* que tu impaciencia (δ), nunca querrías consumir. Siempre te convendría ahorrar, porque el capital te da más "retorno" de lo que tu impaciencia te "cuesta". En ese caso, $\dot{c} > 0$ siempre, tu consumo óptimo sería posponerlo todo lo posible, y el sistema "explotaría".
- Para que exista un balance (una solución estable donde *valga la pena* consumir hoy), tu impaciencia debe "ganarle" al retorno del capital, forzándote a consumir eventualmente.

8.10 Paso 6: Suficiencia (¿Es esta la *mejor* solución?)

Objetivo: Ya encontramos una solución que cumple las reglas. ¿Pero es un máximo (el pico de la montaña) o un mínimo (el fondo del valle)?

Herramienta: Condiciones de Suficiencia de Mangasarian. En resumen, necesitamos que el Hamiltoniano $H_c(c, k)$ sea **cóncavo** con respecto a las variables de control y estado (c, k), dado el precio sombra μ.

$$H_c = c^\alpha + \mu[(r - \theta)k - c]$$

Chequeamos la Matriz Hessiana de H_c con respecto a (c, k):

- $\frac{\partial^2 H_c}{\partial c^2} = \alpha(\alpha - 1)c^{\alpha-2} < 0$ (ya que $0 < \alpha < 1$)
- $\frac{\partial^2 H_c}{\partial k^2} = 0$
- $\frac{\partial^2 H_c}{\partial c \partial k} = 0$

La matriz Hessiana es:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha - 1)c^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es **semidefinida negativa**, lo que confirma que H_c es cóncavo en (c, k).

Veredicto: Se cumplen las condiciones de suficiencia. La trayectoria que encontramos no es solo *una* solución, sino que es **LA** mejor solución, el óptimo global.

9 Caso 3: Análisis de Optimización Dinámica Modelo de Gestión de un Recurso Renovable

El objetivo es actuar como un ”traductor” del lenguaje técnico-matemático a una explicación accesible, enfocada en la *intuición* detrás de cada componente del modelo.

El problema general es el siguiente: imagine que usted es el ”planificador social benevolente” (o el gestor único) de una pesquería. Su meta es decidir cuánto pescado (C, de Consumo) se debe extraer en *cada instante* de tiempo, desde hoy ($t = 0$) hasta el infinito. El objetivo es maximizar la felicidad total o **Utilidad** (U) de la sociedad.

Sin embargo, esta decisión enfrenta una restricción fundamental:

- Si se pesca demasiado, el stock de peces (K, el capital biológico) se agota, llevando al colapso de la pesquería y a la infelicidad futura.
- Si se pesca muy poco, la sociedad pasa hambre hoy, lo cual tampoco maximiza la felicidad total.

El desafío consiste en encontrar el **balance perfecto** y la **senda óptima** de consumo a lo largo del tiempo.

—

9.1 Glosario de Conceptos Fundamentales

Antes de sumergirnos en las ecuaciones, es crucial definir nuestro ”diccionario” de términos clave.

Optimización Dinámica: Es el proceso de encontrar la *mejor trayectoria* o *camino* a seguir a lo largo del tiempo. No se trata de encontrar un único punto óptimo (como en la estática), sino un plan de acción óptimo para cada momento.

Variable de Control (C): Es la ”palanca” que podemos mover en cada instante. Es nuestra variable de decisión. En este modelo, es el **consumo** o la tasa de pesca.

Variable de Estado (K): Representa la situación actual del sistema. Su valor en cualquier momento es el resultado de decisiones pasadas y de la propia dinámica del sistema. Aquí, es el **stock** de peces.

Ecuación de Movimiento (): Es la ”ley física” que gobierna cómo cambia la variable de estado. (léase ”K-punto”) es la velocidad de cambio del stock. Describe la evolución del sistema.

Hamiltoniana (H): Es la herramienta matemática central del Principio de Máximo de Pontryagin. Es una ”súper-función” que construimos para resolver el problema, combinando el objetivo (utilidad) y la restricción (movimiento del stock) en una sola expresión.

Variable de Costado (μ): Este es, quizás, el concepto más importante y menos intuitivo. μ (mu) es el **precio sombra** (o valor marginal) de la variable de estado. Nos dice: ¿cuánto aumentaría nuestra felicidad total (el valor V de la integral) si tuviéramos *una unidad más* de stock (K) en este preciso instante? Es un ”precio” que, aunque no se observa en un mercado, es vital para tomar decisiones óptimas.

Ecuación de Euler: Es la ”regla de oro” que resulta del análisis. Es una ecuación diferencial que nos dice cómo debe cambiar nuestra variable de control (el consumo C) en la senda óptima.

Diagrama de Fases: Es un ”mapa” gráfico que nos permite visualizar el comportamiento del sistema. Muestra, desde cualquier punto de partida (K, C), hacia dónde nos moveremos en el tiempo según las ecuaciones de movimiento.

Punto de Silla (Saddle Point): Es un tipo especial de equilibrio en un sistema dinámico. Es como una silla de montar: es estable solo si te acercas por un camino muy específico (la ”senda estable”), pero inestable en todas las demás direcciones (si te desvías, ”te caes por los lados”).

—

9.2 El Flujo de Trabajo: De la Pregunta a la Solución

El proceso de resolución sigue una secuencia lógica y estructurada:

1. Empezamos con un **Problema de Optimización** (maximizar la utilidad descontada sujeta a la biología de los peces).
2. Para resolverlo, aplicamos el **Principio de Máximo de Pontryagin**.
3. El primer paso es construir la **Hamiltoniana** (que combina el objetivo $U(C)$, la restricción , y el precio sombra μ).
4. Aplicamos las ”reglas” de Pontryagin, que son las **Condiciones de Primer Orden (FOCs)**. Estas son 3 derivadas clave.
5. La **FOC (1)** (respecto al control C) nos da la *regla de consumo óptimo* instantáneo.

6. La **FOC (3)** (respecto al estado K) nos da la *regla de cómo cambia el precio sombra* μ en el tiempo.
7. **Combinando** la (1) y la (3) (y derivando la (1) respecto al tiempo), obtenemos la **Ecuación de Euler** (la ley de movimiento para).
8. La **FOC (2)** (respecto al precio sombra μ) simplemente nos devuelve la **Ecuación de Movimiento** original (la ley de movimiento para).
9. Estas dos ecuaciones (y) forman un **Sistema de Ecuaciones Diferenciales** que describe toda la dinámica.
10. Para entender este sistema, dibujamos un **Diagrama de Fases** (el "mapa").
11. Este mapa nos revela el tipo de equilibrio que tenemos: un **Punto de Silla**.
12. Finalmente, la **Condición de Transversalidad** (una regla sobre qué pasa al "final del tiempo") nos obliga a elegir la *única* trayectoria que nos lleva a ese Punto de Silla.
13. Las **Condiciones de Suficiencia** (concavidad) nos confirman que este camino es, de hecho, un *máximo* (la cima de la montaña) y no un mínimo.

—

9.3 Mapa Conceptual Simplificado

El flujo anterior puede resumirse en el siguiente esquema:

```
[ Problema: Maximizar Utilidad del Consumo de Peces ]
      |
      v
[ Método: Principio de Máximo de Pontryagin ]
      |
      v
[ Herramienta: La Hamiltoniana (H_vp) ]
      |
      +-----> [ Objetivo: U(C) ]
      |
      +-----> [ Restricción: g(K) - C ]
      |
      +-----> [ Precio Sombra: μ ]
      |
      v
[ Reglas: Condiciones de Primer Orden (FOCs) ]
      |
      +-----> 1. ∂H/∂C = 0   (Regla de Consumo)
      |
      +-----> 2. ∂H/∂μ = K̇  (Regla de Movimiento del Stock)
      |
      +-----> 3. -∂H/∂K + rμ = μ̇ (Regla de Movimiento del Precio)
      |
```

```
      v
[ Resultado: Sistema de Ecuaciones ]
      |
      +-----> Ec. de Euler (para Ċ)      <-- (De 1 y 3)
      |
      +-----> Ec. de Movimiento (para K̇) <-- (De 2)
      |
      v
[ Análisis: Diagrama de Fases ]
      |
      +-----> Curva Ċ = 0 (Nulclina de C)
      |
      +-----> Curva K̇ = 0 (Nulclina de K)
      |
      v
[ Solución: Punto de Silla (Equilibrio) ]
      |
      v
[ Camino Óptimo: Senda Estable (Saddle Path) ]
```

—

9.4 Desarrollo Analítico Paso a Paso

A continuación, desarrollamos cada paso del proceso formal.

9.5 Paso 1: El Planteo Formal del Problema

9.5.1 El Objetivo: Maximizar V

El gestor busca maximizar el valor presente de la utilidad total descontada:

$$V = \max_{C(t)} \int_0^\infty U(C(t))e^{-rt}dt$$

Desglosando sus partes:

- $U(C)$**:** Es la función de ”felicidad” o utilidad. Damos por sentado los supuestos estándar:
  - $U'(C) > 0$: ”Más es mejor”. La utilidad *aumenta* si consumes más.
  - $U''(C) < 0$: ”Utilidad marginal decreciente”. La *primera* porción de pescado da mucha felicidad. La *décima* porción da felicidad, pero menos que la primera. La función es cóncava (la curva de felicidad ”se aplana”).
- e^{-rt}**:** Es el ”factor de descuento” o de impaciencia. r es la tasa de descuento. Si $r > 0$, significa que la sociedad es impaciente: valora más la felicidad *hoy* que la felicidad *mañana*. Este término ”aplasta” el valor de la utilidad futura.
- $\int_0^\infty ...dt$**:** Es la ”suma” de toda la felicidad (descontada) desde hoy ($t = 0$) hasta el infinito.

9.5.2 La Restricción: Ecuación de Movimiento

La maximización anterior está sujeta a la "física" de la población de peces:

$$\frac{dK}{dt} == g(K) - C$$

- $g(K)$**:** Es la función de "crecimiento biológico". Generalmente tiene forma de U invertida (logística):
  - Si K es bajo, hay pocos peces para reproducirse y $g(K)$ es bajo.
  - Si K es medio (en K_{MSY}, Máximo Rendimiento Sostenible), el crecimiento es máximo.
  - Si K es alto (sobrepoblación), la competencia por recursos reduce la tasa de crecimiento.
- $-C$**:** Es el consumo o pesca, lo que *resta* al stock.
- **Intuición:** El cambio neto en el stock de peces () es igual a [Lo que nace y crece] menos [Lo que se pesca].

9.6 Pasos 2 y 3: Construir la Función Hamiltoniana

Usamos la "Hamiltoniana en Valor Presente" (), que es más sencilla de interpretar pues ya incorpora el descuento.

$$(C, K, \mu) = U(C) + \mu[g(K) - C]$$

Intuición de la Hamiltoniana: Piense en como el "panel de control" del valor total que generamos *en este instante*. Se compone de dos partes:

- $U(C)$**:** Es la **felicidad directa** que obtenemos *hoy* por consumir C.
- $\mu[g(K) - C]$**:** Es la **felicidad indirecta**. Es el *cambio* en el stock ($= g(K) - C$) multiplicado por el *valor* de cada unidad de stock (μ). Si el stock está creciendo (> 0), estamos generando "riqueza" futura, y eso nos da un valor hoy, cuantificado por μ.

En resumen: **Hamiltoniana = (Valor del Consumo Hoy) + (Valor del Cambio en la Riqueza Futura)**.

9.7 Paso 4: Deducir las Condiciones de Primer Orden (Las Reglas)

Para maximizar H en cada instante, aplicamos las 3+1 condiciones del Principio de Máximo:

1. **Regla del Consumo (FOC respecto a C):**

   $$C = 0 \implies U'(C) - \mu = 0 \implies \mu = U'(C)$$

   Intuición: Esta es la regla de oro. $U'(C)$ es la felicidad extra de comer *un* pez más (Utilidad Marginal). μ es el valor de ese pez si lo hubieras dejado en el mar (Costo de Oportunidad). La regla dice que debes consumir hasta el punto exacto en que **la felicidad de comerlo ($U'(C)$) sea igual a la felicidad de dejarlo en el mar (μ)**.

2. **Regla de Movimiento (FOC respecto a μ):**

   $$\mu = \implies g(K) - C =$$

Intuición: Esto no es una regla nueva, sino una "verificación de consistencia". Al derivar respecto a μ, simplemente recuperamos la ecuación de movimiento original, confirmando que nuestra solución respeta la biología del sistema.

3. **Regla de Arbitraje (FOC respecto a K):**

$$-K + r\mu = \implies -\mu g'(K) + r\mu =$$

Intuición: Esta es la regla que nos dice cómo debe cambiar el *valor* del pez (μ) en el tiempo. La reordenamos para entenderla mejor:

$$r\mu = \mu g'(K) +$$

- **Lado Izquierdo ($r\mu$):** Es la ganancia de una "inversión alternativa". Si "vendes" el pez (que vale μ) y pones ese valor en un banco, ganas la tasa de interés r. Es tu **costo de oportunidad** de mantener el pez en el mar.
- **Lado Derecho ($\mu g'(K) +$):** Es la ganancia total de "invertir en el mar" (no pescar el pez). Ganas dos cosas: (1) El pez se reproduce, dándote una ganancia biológica $g'(K)$ (el "interés" que paga el mar), valorada a su precio μ. (2) El precio del pez en sí mismo puede cambiar ().

En la senda óptima, **la ganancia de "invertir en el banco" debe ser igual a la ganancia de "invertir en el mar"**.

4. **Condición de Transversalidad:**

$$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} \mu(t) K(t) = 0$$

Intuición: Esta es la regla del "final del juego". Dice que, en el infinito, el valor presente del stock de peces que te quede debe ser cero. No puedes acumular riqueza eternamente sin usarla. Esto nos prohíbe soluciones "tontas" (como no comer nunca para tener infinitos peces).

9.8 Paso 5: Hallar la Ecuación de Euler

(Referencia: ‘image$_5$c557c.png`y`image$_5$c5824.png`)

Ahora "juntamos" las reglas 1 y 3 para obtener una sola ecuación que nos diga cómo debe cambiar el **consumo** ().

1. De la Regla 1, sabemos que: $\mu = U'(C)$.
2. Derivamos esta ecuación respecto al tiempo (usando la regla de la cadena):

$$= \frac{d\mu}{dt} = \frac{dU'(C)}{dC} \cdot \frac{dC}{dt} = U''(C)\cdot$$

3. De la Regla 3, despejamos :

$$= r\mu - \mu g'(K) = \mu(r - g'(K))$$

4. Ahora, igualamos las dos expresiones para :

$$U''(C)\cdot = \mu(r - g'(K))$$

5. Finalmente, sustituimos μ usando la Regla 1 ($\mu = U'(C)$) otra vez:

$$U''(C) = U'(C)(r - g'(K))$$

Esta es la **Ecuación de Euler** (o de Keynes-Ramsey adaptada). Nos dice cómo evoluciona el consumo óptimo.

9.9 Paso 6: Armar el Sistema Dinámico

Ahora tenemos las dos ecuaciones de movimiento que describen *toda* la dinámica óptima del sistema, en términos de las dos variables clave: C y K.

1. **Ecuación de Euler (despejada para):**

$$= \frac{U'(C)}{-U''(C)}(r - g'(K))$$

   (Notar que $-U''(C)$ es positivo, ya que $U'' < 0$).

2. **Ecuación de Movimiento (la original):**

$$= g(K) - C$$

9.10 Paso 7: Construir el Diagrama de Fases (El Mapa)

Para dibujar el mapa, encontramos las "curvas de demarcación" (o nulclinas), que son las líneas donde una de las variables deja de moverse.

9.10.1 Curva $= 0$ (Stock constante)

El stock deja de cambiar si $= 0$.

$$= 0 \implies g(K) - C = 0 \implies \mathbf{C = g(K)}$$

Intuición: El stock se mantiene estable si **lo que pescas (C) es exactamente igual a lo que nace ($g(K)$)**. Esta es la **curva en forma de U invertida** del crecimiento biológico en el gráfico (K, C).

9.10.2 Curva $= 0$ (Consumo constante)

El consumo deja de cambiar si $= 0$. Mirando la Ecuación de Euler, esto ocurre cuando:

$$(r - g'(K)) = 0 \implies \mathbf{g'(K) = r}$$

Intuición: Tu consumo se estabiliza cuando **la productividad marginal del stock ($g'(K)$) es igual a tu tasa de impaciencia (r)**. Es el punto de arbitraje perfecto. Dado que esto define un valor fijo de K (llamémoslo K^*), esta es una **línea vertical** en el gráfico (K, C).

El punto donde estas dos líneas ($C = g(K)$ y $g'(K) = r$) se cruzan es el **Estado Estacionario** ($= 0$ y $= 0$).

9.11 Paso 8: Evaluar la Dinámica del Sistema (Las Flechas)

El mapa queda dividido en 4 zonas. Las flechas nos dicen hacia dónde se mueve el sistema (K, C) si estamos en una de esas zonas.

- **Movimiento Horizontal (cambio en K):**
  - Si estás *por encima* de la curva $\dot{K} = 0$ (la U invertida), $C > g(K)$. Pescas más de lo que nace. El stock K disminuye. **Flechas van a la izquierda ($\leftarrow$).**
  - Si estás *por debajo* de la curva $\dot{K} = 0$, $C < g(K)$. Pescas menos de lo que nace. El stock K aumenta. **Flechas van a la derecha ($\rightarrow$).**
- **Movimiento Vertical (cambio en C):**
  - Si estás *a la derecha* de la línea $\dot{C} = 0$ (donde $g'(K) < r$), el "interés del mar" es bajo. La Ecuación de Euler dice $\dot{C} < 0$. El consumo debe bajar. **Flechas van hacia abajo ($\downarrow$).**
  - Si estás *a la izquierda* de la línea $\dot{C} = 0$ (donde $g'(K) > r$), el "interés del mar" es alto. La Ecuación de Euler dice $\dot{C} > 0$. El consumo debe subir. **Flechas van hacia arriba ($\uparrow$).**

Al combinar estas flechas, el equilibrio es un **punto de ensilladura**. Solo hay una trayectoria (la "senda estable") que nos lleva *directamente* al equilibrio. Si nos desviamos, las flechas nos "escupen" hacia un resultado no óptimo (agotar los peces o acumularlos sin sentido).

9.12 Paso 9: Verificar las Condiciones de Suficiencia

Intuición: ¿Cómo sabemos que este camino es un *máximo* (la cima) y no un *mínimo* (el valle)? Debemos verificar que el problema es **cóncavo**.

1. $U(C)$ **es cóncava:** Lo supusimos desde el inicio ($U''(C) < 0$, utilidad marginal decreciente). Verificado.
2. $g(K)$ **es cóncava:** La forma de U invertida (logística) es cóncava. Verificado.
3. $\mu > 0$**:** El precio sombra del pescado debe ser positivo (tener peces es bueno). Lo vimos en la Regla 1: $\mu = U'(C)$, y $U'(C) > 0$ (más es mejor). Verificado.

Como la Hamiltoniana $H = U(C) + \mu(g(K) - C)$ es cóncava en las variables de estado (K) y control (C), el teorema de suficiencia de Mangasarian nos asegura que cualquier solución que cumpla las FOCs y la Condición de Transversalidad es, de hecho, el máximo global.

—

9.13 Conclusión Final

El análisis de optimización dinámica nos provee de un plan de acción completo:

1. El problema de maximizar la utilidad bajo una restricción biológica es un problema cóncavo, lo que garantiza una única solución óptima.
2. El sistema dinámico resultante ($\dot{K}$, $\dot{C}$) tiene un equilibrio de **punto de silla**.
3. La **Condición de Transversalidad** nos obliga a descartar todas las trayectorias explosivas o implosivas, forzándonos a elegir la *única senda estable* que conduce al equilibrio.

Por lo tanto, para cualquier nivel de stock inicial K_0, existe un *único* nivel de consumo inicial C_0 que nos sitúa sobre esa senda estable, definiendo así la trayectoria óptima de consumo y gestión del recurso para toda la eternidad.

10 Mapa Conceptual

El **Control Óptimo Continuo** es un pilar fundamental de la matemática aplicada y la economía dinámica. Nos proporciona un marco riguroso para responder a una pregunta aparentemente simple: ¿Cuál es la mejor manera de gestionar un sistema que evoluciona a lo largo del tiempo?

Imagina que eres el capitán de un barco (el sistema) y quieres llegar a un destino (el objetivo) minimizando el consumo de combustible. Tus decisiones sobre el timón y el acelerador (las variables de control) afectan la posición y velocidad del barco (las variables de estado) en cada instante. El control óptimo nos da el ”mapa” y las ”instrucciones” para tomar la mejor decisión posible en *cada momento* del viaje, sabiendo cómo cada decisión impacta el futuro.

Este informe desglosa los componentes, la metodología y las aplicaciones de esta poderosa herramienta.

Objetivo Central: Su propósito es determinar las trayectorias temporales óptimas para un conjunto de **variables de control** ($u(t)$) y las **variables de estado** ($y(t)$) resultantes. El objetivo es optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo V durante un horizonte temporal específico, que puede ser finito ($[0, T]$) o infinito ($[0, \infty)$).

Componentes Fundamentales: Todo problema de control óptimo se define por cuatro elementos:

1. La **Variable de Control (u)**: Lo que podemos elegir.
2. La **Variable de Estado (y)**: Lo que describe el sistema.
3. La **Ecuación de Movimiento ($\dot{y}$)**: La regla de cómo cambia el estado.
4. La **Función Objetivo (V)**: Lo que queremos optimizar.

Herramienta Principal: El método de solución por excelencia es el **Principio del Máximo de Pontryagin (PMP)**. Este principio introduce una función auxiliar clave, el **Hamiltoniano (H)**, que nos permite incorporar el valor futuro del estado (a través de la **variable de coestado λ**) en la decisión presente.

Análisis de Solución: La aplicación del PMP resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales. El análisis de este sistema, a menudo visualizado mediante un **Diagrama de Fases**, es crucial. En muchos problemas económicos, la trayectoria óptima es una **senda de ensilladura (saddle path)**, la única trayectoria estable que converge al equilibrio de largo plazo (estado estacionario).

—

10.1 Los Pilares del Problema: Conceptos Fundamentales

Para construir la solución, primero debemos entender las piezas.

10.2 Variable de Control (u(t) o c(t))

Es la variable de elección; aquello que el agente (o ”controlador”) ajusta en cada instante t para optimizar su objetivo. Es el ”volante” del sistema. Su elección impacta directamente la evolución de la variable de estado.

- **Ejemplos:** El nivel de consumo (c) en un modelo de crecimiento, la tasa de extracción (h) de un recurso natural, o el esfuerzo de pesca.

10.3 Variable de Estado (y(t) o k(t))

Describe la situación o ”estado” del sistema en un instante t. Es una variable que acumula los efectos de las decisiones pasadas. El agente no la elige directamente, sino que solo puede influir en su *tasa de cambio* ($\dot{y}$) a través de la variable de control.

- **Ejemplos:** El stock de capital (k), la biomasa de un banco de peces (x), o el nivel de contaminación en la atmósfera (p).

10.4 Función Objetivo (V)

Es la medida de éxito; la función matemática que se busca maximizar o minimizar. Generalmente, es una integral que suma los ”beneficios” (o costos) instantáneos, $F(\cdot)$, a lo largo de todo el horizonte temporal, descontados al presente.

$$V = \int_0^T e^{-\rho t} F(t, y(t), u(t))\, dt$$

Donde ρ es la tasa de descuento temporal.

10.5 Ecuación de Movimiento ($\dot{y} = f(\cdot)$)

Es la restricción dinámica fundamental. Es una ecuación diferencial que describe cómo cambia la variable de estado en el tiempo. Nos dice cómo la elección de control $u(t)$ traduce un patrón de movimiento para $y(t)$.

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = f(t, y(t), u(t))$$

10.6 El Hamiltoniano (H)

Esta es la función auxiliar central del PMP. Puede interpretarse como el ”PIB económico” total del problema en un instante t. Captura el valor total generado, sumando dos componentes:

1. El beneficio instantáneo: $F(t, y, u)$
2. El valor de la ”inversión” (el cambio en el estado): $\lambda(t) \cdot f(t, y, u)$

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t) \cdot f(t, y, u)$$

El Hamiltoniano equilibra la disyuntiva entre la ganancia de ”hoy” (consumir, F) y la ganancia de ”mañana” (invertir, $\lambda \cdot \dot{y}$).

10.7 Variable de Coestado ($\lambda(t)$ o $\mu(t)$)

Esta es quizás la variable más abstracta pero crucial. También conocida como el **”precio sombra”** (shadow price) de la variable de estado.

- **Interpretación:** $\lambda(t)$ mide el valor marginal que tiene para la función objetivo *total* (V) una unidad adicional de la variable de estado (y) en el instante t.
- **Intuición:** Responde a la pregunta: ”Si en el instante t te regalara una unidad extra de y (ej. capital), ¿cuánto aumentaría tu bienestar total acumulado V?”.

10.8 Hamiltoniano en Valor Corriente (H_c)

Cuando existe un descuento temporal ($\rho > 0$), el problema es "no autónomo" (depende explícitamente de t vía $e^{-\rho t}$). Esto complica el análisis. Para simplificarlo, definimos el Hamiltoniano en Valor Corriente (H_c) y la variable de coestado en valor corriente (μ):

$$\mu(t) = \lambda(t)e^{\rho t} \quad \text{y} \quad H_c = H(t, y, u, \lambda) \cdot e^{\rho t}$$

Esto transforma el problema en uno autónomo (independiente del tiempo), lo que es esencial para analizar el estado estacionario. H_c representa el valor *actual* (en tiempo t) de la suma del beneficio instantáneo y el valor de la inversión.

$$H_c(y, u, \mu) = F(y, u) + \mu \cdot f(y, u)$$

10.9 Ecuación de Euler ($\dot{u}$ o $\dot{c}$)

No es un componente inicial, sino un *resultado* clave del PMP. Es la ecuación diferencial que describe la trayectoria óptima de la *variable de control*. Se obtiene al combinar las condiciones de Máximo y de Coestado, y nos dice cómo debe cambiar nuestro control a lo largo del tiempo para mantenernos en la senda óptima.

—

10.10 El Método: El Principio del Máximo de Pontryagin (PMP)

El PMP es la "receta" que nos proporciona las condiciones necesarias que cualquier trayectoria óptima debe cumplir.

10.11 Condiciones Necesarias (CPMP)

Para que una trayectoria $(y^*(t), u^*(t))$ sea óptima, debe existir una variable de coestado $\lambda^*(t)$ tal que las siguientes cuatro reglas se cumplan simultáneamente en cada instante t:

1. **Condición de Máximo (Optimización Estática):** En todo momento, la variable de control $u^*(t)$ debe ser elegida para maximizar el Hamiltoniano H, dados los valores actuales de $y(t)$ y $\lambda(t)$.
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \left(\text{o} \quad \frac{\partial H_c}{\partial u} = 0\right)$$
(Esto aplica para controles no acotados, es decir, que no tienen límites superiores o inferiores).

2. **Ecuación de Estado (Ecuación de Movimiento):** La trayectoria del estado debe ser coherente con la restricción dinámica.
$$\dot{y}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \left(\text{o} \quad \dot{y}(t) = \frac{\partial H_c}{\partial \mu}\right)$$
(Esto es simplemente $f(y, u)$).

3. **Ecuación de Coestado (Evolución del Precio Sombra):** Esta es la regla de evolución dinámica para el precio sombra. Nos dice cómo cambia el valor marginal del estado a lo largo del tiempo.

- **Para H:** $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}$
- **Para H_c (Valor Corriente):** $\dot{\mu}(t) = \rho\mu - \frac{\partial H_c}{\partial y}$

Esta última es la famosa **condición de arbitraje**, que se explica más adelante.

4. **Condición de Transversalidad (Condición de Frontera):** Esta regla define las condiciones de "llegada" al final del horizonte temporal T. Es crucial para "anclar" el sistema y asegurar que no terminemos con activos sin valor (o deudas).

10.12 Condiciones de Suficiencia

Las CPMP son solo necesarias. Para asegurarnos de que la solución encontrada es un máximo global (y no un mínimo o un punto silla local), necesitamos condiciones adicionales, generalmente ligadas a la concavidad.

- **Condición de Mangasarian:** Exige que la función objetivo $F(y, u)$ y la ecuación de movimiento $f(y, u)$ sean cóncavas en las variables y y u.
- **Condición de Arrow:** Una condición más refinada y potente. Exige que el Hamiltoniano Maximizado, $\hat{H}(y, \lambda) = \max_u H(y, u, \lambda)$, sea una función cóncava respecto a la variable de estado y.

10.13 Análisis de la Solución y Relaciones Clave

10.14 La Condición de Arbitraje (Ecuación de $\dot{\mu}$)

La ecuación de coestado en valor corriente, $\dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H_c}{\partial y}$, puede reescribirse como:

$$\rho\mu = \dot{\mu} + \frac{\partial H_c}{\partial y}$$

Esta es una de las ecuaciones más importantes en economía dinámica.

- **Lado Izquierdo ($\rho\mu$):** Es el **costo de oportunidad** de mantener el activo (el estado y). Representa el retorno que obtendríamos si, en lugar de mantener y, pusiéramos su valor (μ) en un activo alternativo que rinde la tasa ρ.
- **Lado Derecho ($\dot{\mu} + \frac{\partial H_c}{\partial y}$):** Es el **retorno total** de mantener el activo y. Se compone de dos partes:
  - **Ganancia de Capital ($\dot{\mu}$):** Cuánto cambia el precio (valor) del activo en el tiempo.
  - **"Dividendo" ($\frac{\partial H_c}{\partial y}$):** Cuánto contribuye marginalmente el activo y al beneficio instantáneo H_c.

En el óptimo, el retorno de mantener el activo debe ser exactamente igual a su costo de oportunidad.

10.15 Diagrama de Fases y la Senda de Ensilladura

La solución del problema se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

1. La Ecuación de Movimiento: $\dot{y} = f(y, u)$

2. La Ecuación de Euler: $\dot{u} = g(y, u)$ (o $\dot{c} = g(k, c)$)

El **Diagrama de Fases** es la herramienta gráfica para analizar este sistema.

- **Curvas de Demarcación (Loci):** Se dibujan las líneas donde las variables dejan de moverse:
  - El locus $\dot{y} = 0$: Combinaciones de (y, u) donde el estado es estable.
  - El locus $\dot{u} = 0$: Combinaciones de (y, u) donde el control es estable.
- **Estado Estacionario:** El punto donde ambas curvas se cruzan ($\dot{y} = 0$ y $\dot{u} = 0$). Es el equilibrio de largo plazo del sistema.
- **Punto de Ensilladura (Saddle Path):** En la mayoría de los problemas económicos, el estado estacionario es un **punto de silla**. Esto significa que el sistema es inherentemente inestable; la mayoría de las trayectorias divergen y se alejan del equilibrio.
- **La Solución Óptima:** Existe una *única* trayectoria, la **senda de ensilladura**, que converge exactamente al estado estacionario. La **Condición de Transversalidad** actúa como el mecanismo que nos obliga a elegir esta única senda estable. Cualquier otra trayectoria violaría la optimalidad al final del horizonte.

10.16 Condiciones de Transversalidad (CT) Específicas

Las reglas de frontera dependen de cómo esté planteado el final del problema.

a) **Horizonte Finito T, Estado Final Libre $y(T)$:** Si el tiempo T está fijo pero no nos importa el valor final del estado $y(T)$, entonces el valor marginal de ese estado al final debe ser cero.

$$\lambda(T) = 0 \quad \text{(o } \mu(T) = 0\text{)}$$

b) **Horizonte Infinito ($T \to \infty$):** Es el caso más común en economía. La condición análoga es que el valor presente del estado tienda a cero en el infinito.

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \mu(t) y(t) = 0$$

c) **Horizonte Finito T, Estado Final Fijo $y(T) = y_f$:** Si estamos obligados a llegar a un estado específico y_f, entonces no hay condición sobre el precio sombra $\lambda(T)$, ya que este será el que sea necesario para forzar a la trayectoria a llegar a y_f.

10.17 Aplicaciones Ejemplares

Este marco es la base de:

- **Modelos de Crecimiento Económico (Ramsey):** Dónde $k(t)$ es el capital, $c(t)$ el consumo, y el objetivo es maximizar la utilidad intertemporal.
- **Gestión de Recursos Naturales:** Dónde $y(t)$ es el stock del recurso (peces, petróleo) y $u(t)$ es la tasa de extracción.
- **Modelos de Contaminación:** Dónde $y(t)$ es el stock de polución y $u(t)$ es la tasa de abatimiento o producción.

- **Modelos "Bang-Bang":** Soluciones donde el control óptimo es saltar entre los extremos (ej. acelerar a fondo o frenar a fondo).

—

10.18 Guía Práctica: Secuencia de Solución

Resolver un problema de control óptimo sigue una secuencia lógica de pasos:

1. **Paso 1: Evaluar el Planteo del Problema.** Identificar claramente la función objetivo $F(\cdot)$, la variable de control u, la variable de estado y, la ecuación de movimiento $\dot{y} = f(\cdot)$, el horizonte temporal (T o ∞) y las condiciones de frontera ($y(0)$, $y(T)$).

2. **Paso 2: Construir la Función Hamiltoniana.** Escribir el Hamiltoniano. Si el problema tiene descuento ($\rho > 0$), es recomendable trabajar directamente con el Hamiltoniano en Valor Corriente (H_c) y la coestado μ.

$$H_c = F(y, u) + \mu \cdot f(y, u)$$

3. **Paso 3: Deducir las Condiciones de Primer Orden (PMP).** Aplicar sistemáticamente las condiciones necesarias:
   - (1) Condición de Máximo: $\frac{\partial H_c}{\partial u} = 0$
   - (2) Ecuación de Estado: $\dot{y} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} (= f)$
   - (3) Ecuación de Coestado: $\dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H_c}{\partial y}$
   - (4) Condición de Transversalidad (según el problema).

4. **Paso 4: Hallar la Ecuación de Euler (Dinámica del Control).** De la Condición de Máximo (1), despejar μ en términos de y y u. Derivar esta expresión respecto al tiempo t para obtener $\dot{\mu}$. Finalmente, igualar este $\dot{\mu}$ con el de la Ecuación de Coestado (3). Esto elimina μ y $\dot{\mu}$, dejando una ecuación diferencial que relaciona $\dot{u}$ con y y u.

5. **Paso 5: Armar el Sistema Dinámico.** Juntar las dos ecuaciones diferenciales clave:
   - $\dot{y} = \dots$ (de la Ecuación de Movimiento)
   - $\dot{u} = \dots$ (de la Ecuación de Euler)

6. **Paso 6: Construir el Diagrama de Fases.** En un plano (y, u), dibujar las curvas de demarcación (loci) $\dot{y} = 0$ y $\dot{u} = 0$. Su intersección es el Estado Estacionario (y^*, u^*).

7. **Paso 7: Realizar el Análisis Cualitativo.** Evaluar los signos de $\dot{y}$ y $\dot{u}$ en las cuatro regiones del diagrama (a partir del sistema del Paso 5) para determinar las flechas de movimiento. Esto permite identificar la Senda de Ensilladura (la trayectoria estable que converge al equilibrio).

8. **Paso 8: Verificar Condiciones de Suficiencia.** Asegurar que la trayectoria encontrada sea un máximo global, generalmente verificando la concavidad del Hamiltoniano Maximizado (Condición de Arrow).

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

@toobaziti

Disclaimer: Este documento ha sido elaborado a partir de la grabación de una clase, el slide visto en clase y el texto recomendados. Puede contener errores u omisiones asociados a la calidad del audio, cortes involuntarios o dificultades de transcripción. Por favor, consúltese siempre la fuente original de la grabación si se requiere confirmación de algún detalle.

Índice

1. Introducción y Contexto Fundamental **1**
- 1.1. Definiciones Clave y Notación . . . 1
- 1.2. Intuición y Significado Profundo . . . 2
  - 1.2.1. Microejemplos Intuitivos (sin cálculo) . . . 2
  - 1.2.2. Conclusión Parcial: Conceptos Fundamentales . . . 3

2. Cálculo de Autovalores y Autovectores: Procedimiento Paso a Paso **3**
- 2.1. Obtención de Autovalores: La Ecuación Característica . . . 3
  - 2.1.1. Cálculo para una Matriz 2x2 . . . 3
  - 2.1.2. Consideraciones para Matrices de Mayor Orden (3x3 o más) . . . 4
- 2.2. Obtención de Autovectores . . . 4
- 2.3. Errores Comunes en el Proceso de Cálculo . . . 5
- 2.4. Conclusión Parcial: Cálculo . . . 6

3. Hipótesis y Propiedades Fundamentales de las Matrices **6**
- 3.1. Condiciones y Regularidades Típicas . . . 6
- 3.2. Propiedades Clave Adicionales . . . 7
- 3.3. Casos Especiales de Matrices y sus Implicaciones . . . 7
  - 3.3.1. Matriz Singular y Autovalor Cero . . . 7
  - 3.3.2. Multiplicidad Algebraica y Geométrica . . . 7
  - 3.3.3. Diagonalización de Matrices . . . 7
  - 3.3.4. Matrices Simétricas Reales . . . 7

4. Análisis de Estabilidad y Clasificación de Sistemas Dinámicos **7**
- 4.1. Criterios de Estabilidad por Tipo de Tiempo . . . 8
- 4.2. Clasificación de Equilibrios en Diagramas de Fase (para sistemas 2D) . . . 8
- 4.3. Conclusión Parcial: Análisis de Estabilidad y Aplicaciones . . . 9

5. Aplicaciones de Autovalores y Autovectores **9**
- 5.1. Aplicaciones en Economía Matemática . . . 9
- 5.2. Aplicaciones en Ciencia de Datos . . . 10

6. Conexiones Interdisciplinarias y Ampliación de Conceptos **10**
- 6.1. Conexiones Clave . . . 10
- 6.2. Red Conceptual Básica . . . 11

7. Conclusión Global **12**

1. Introducción y Contexto Fundamental

El estudio de los **autovalores** y **autovectores** es una piedra angular en el **álgebra lineal**, constituyendo herramientas indispensables para comprender las propiedades intrínsecas de las transformaciones lineales representadas por matrices. Estos conceptos nos permiten desentrañar cómo una matriz .[es]tira", .[en]coge.º ïnvierte"vectores en direcciones específicas sin alterar su orientación fundamental. Su importancia radica en la capacidad de simplificar el comportamiento de sistemas lineales y, crucialmente, de analizar la dinámica y la estabilidad de sistemas complejos que evolucionan a lo largo del tiempo, ya sean continuos (modelados por ecuaciones diferenciales) o discretos (modelados por ecuaciones en diferencias). Sin la comprensión de autovalores y autovectores, el análisis de la evolución de variables económicas (como precios, capital o poblaciones) o la determinación de la estabilidad estructural en ingeniería sería significativamente más complejo y menos intuitivo. Para abordar este tema, es fundamental poseer conocimientos de álgebra lineal básica, incluyendo matrices, vectores, operaciones matriciales, determinantes, así como una introducción a las ecuaciones diferenciales y en diferencias.

1.1. Definiciones Clave y Notación

Para un estudio riguroso, se emplean las siguientes definiciones y notaciones:

- **Autovalor (λ)**: Es un **escalar** (un número, que puede ser real o complejo) que, para una matriz A, cumple la propiedad de que existe un vector no nulo x (su autovector asociado) tal que al aplicar la transformación lineal de A a x, el resultado es simplemente el vector x escalado por λ. En el contexto dinámico, el signo y magnitud de los autovalores son determinantes para la estabilidad de un sistema.
- **Autovector (x o v)**: Es el **vector no nulo** que, al ser transformado por la matriz A, mantiene su dirección original, solo siendo escalado por el autovalor correspondiente. Representa las direcciones "naturales.º ïnvariantes"de la transformación.
- **Matriz (A)**: Representa una **matriz cuadrada** de coeficientes, típicamente de dimensión $n \times n$. Es la representación de la transformación lineal o de las interacciones en un sistema dinámico.
- **Matriz Identidad (I)**: Es una matriz cuadrada con unos en su diagonal principal y ceros en el resto. Actúa como el elemento neutro en la multiplicación matricial y es crucial en la formulación de la ecuación característica.
- **Ecuación Fundamental de Autovalores**: La relación central que define autovalores y autovectores es:

  $$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

  Esta ecuación establece que, cuando una matriz cuadrada A opera sobre un vector no nulo x, el resultado es simplemente un múltiplo escalar de ese mismo vector x.
- **Ecuación Característica**: Una ecuación algebraica de tipo polinomial, $\det(A - \lambda I) = 0$, cuyas raíces son precisamente los autovalores del sistema. Se deriva de la condición de que el sistema $(A - \lambda I)x = 0$ tenga soluciones no triviales para x.
- **Polinomio Característico**: El polinomio que se obtiene al expandir $\det(A - \lambda I)$. Las raíces de este polinomio son los autovalores.
- **Espacio Nulo (o Núcleo)**: Para un autovalor λ_i, el espacio nulo de $(A - \lambda_i I)$ es el conjunto de todos los autovectores asociados a λ_i (más el vector nulo).
- **Vector Cero (0)**: Representa el vector nulo, con todos sus componentes iguales a cero.

Convenciones Importantes:

- Los autovectores deben ser siempre **no nulos**.
- La multiplicación de matrices generalmente **no es conmutativa** ($AB \neq BA$ en general).
- Los **determinantes** se calculan solo para matrices cuadradas. Un determinante de cero indica una matriz singular.
- Los autovalores pueden ser **reales o complejos**.

1.2. Intuición y Significado Profundo

La intuición detrás de los autovalores y autovectores es que nos permiten comprender cómo una transformación lineal, representada por una matriz, .estira.o çontraeçiertos vectores en direcciones específicas sin alterar su orientación. El autovalor λ nos informa en qué proporción se escala el autovector x, mientras que el autovector mismo nos indica la dirección invariante donde ocurre esta acción. Si λ es negativo, el vector cambia de sentido además de escalar.
En contextos dinámicos como la economía matemática y la ingeniería, esta intuición es invaluable. Los autovalores y autovectores posibilitan la **descomposición de la dinámica compleja** de un sistema en componentes más sencillas y predecibles. Esto es fundamental para:

- **Descomponer la dinámica**: Entender cómo diferentes "modos.o "direcciones"de cambio contribuyen a la evolución general del sistema.
- **Indicar el comportamiento a largo plazo**: El signo y magnitud de los autovalores indican si un sistema tenderá a converger a un equilibrio (estable), a divergir de él (inestable), o a exhibir patrones oscilatorios.
- **Resolver sistemas dinámicos**: Son la base para encontrar las soluciones generales de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y ecuaciones en diferencias (EED) lineales.
- **Modelar fenómenos económicos**: Su conocimiento es crítico para comprender la evolución continua o discreta de variables como poblaciones, precios, capital o deuda en diversos modelos económicos.
- **Analizar la estabilidad de manera rigurosa**: La estabilidad de un sistema dinámico depende directamente de las propiedades (reales, complejas, signos) de sus autovalores.

En resumen, los autovalores y autovectores son las "huellas dactilares"de una matriz, revelando la naturaleza fundamental de la transformación que representa y, por ende, el comportamiento dinámico del sistema. Nos dicen **çuánto"** se estira o reduce un sistema en direcciones privilegiadas, y **.en qué dirección"** ocurre ese cambio, funcionando como el .ADN"del sistema lineal.

1.2.1. Microejemplos Intuitivos (sin cálculo)

Para una mejor comprensión, consideremos algunos ejemplos rápidos:

- **Escalado Simple**: Una matriz que duplica la longitud de cualquier vector en el eje X. Un vector a lo largo del eje X es un autovector con autovalor 2. La matriz lo estira, pero no cambia su dirección fundamental.
- **Contracción y Expansión**: Una matriz que comprime un vector en una dirección (autovalor 0.5) y expande otro en una dirección perpendicular (autovalor 3). Estos son autovectores, mostrando las "direcciones preferenciales"de la transformación.
- **Reflexión/Inversión**: Una matriz que refleja un vector sobre el origen (cambia su signo). Ese vector es un autovector con autovalor de -1. La dirección es la misma, pero el sentido se invierte.
- **Matriz Diagonal**: Para $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, los autovectores son las direcciones de los ejes, y los autovalores son 2 y 0.5. Las escalas son independientes por coordenada.
- **Proyección**: Una proyección sobre una recta tendrá autovalores 1 (para la dirección proyectada) y 0 (para la dirección ortogonal). Económicamente, esto traduce componentes "persistentes"($\lambda \approx 1$) versus componentes que se eliminan ($\lambda \approx 0$).

Estos ejemplos ilustran cómo los autovalores y autovectores capturan la esencia de cómo una transformación altera el "tamañoz "sentido"de ciertas direcciones, mientras las mantiene en su "trayectoria.oriqinal.

1.2.2. Conclusión Parcial: Conceptos Fundamentales

En resumen, los autovalores y autovectores son la clave para desentrañar la dinámica de los sistemas lineales y linealizados. Al proporcionar las direcciones (autovectores) y las tasas de escalamiento (autovalores) de una transformación, permiten una comprensión profunda de la estabilidad y el comportamiento a largo plazo de las variables. Esta fundamentación teórica es esencial en la economía matemática, donde la predicción y el análisis de la evolución temporal de los fenómenos económicos son tareas centrales. Su dominio permite ir más allá de la mera descripción de un estado de equilibrio, adentrándose en el cómo y por qué las variables se mueven hacia o lejos de dicho equilibrio, revelando la naturaleza fundamental de la transformación que la matriz representa.

2. Cálculo de Autovalores y Autovectores: Procedimiento Paso a Paso

El cálculo de autovalores y autovectores es un proceso sistemático que requiere rigor algebraico, basado en la resolución de polinomios y sistemas de ecuaciones lineales. Es crucial recordar que **siempre se calculan primero los autovalores y después los autovectores**.

2.1. Obtención de Autovalores: La Ecuación Característica

Para encontrar los autovalores de una matriz cuadrada A, el primer paso es resolver la **ecuación característica**. Esta ecuación se deriva de la definición fundamental $Ax = \lambda x$, que puede reescribirse como $(A - \lambda I)x = 0$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión que A. Para que este sistema de ecuaciones lineales homogéneo tenga soluciones no triviales para x (es decir, que existan autovectores no nulos), el determinante de la matriz de coeficientes $(A - \lambda I)$ debe ser igual a cero. Así, la ecuación para hallar los autovalores es:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

Al expandir este determinante, se obtiene un **polinomio característico** en términos de λ, cuyas raíces son los autovalores buscados. Este polinomio puede ser de grado n para una matriz $n \times n$.

2.1.1. Cálculo para una Matriz 2x2

Para una matriz de 2x2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, el proceso es el siguiente:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

Luego, calculamos el determinante:

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

Expandiendo el producto, obtenemos el polinomio característico de segundo grado:

$$ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

Reordenando los términos, la ecuación característica toma la forma:

$$\lambda^{\mathbf{2}} - (\mathbf{a} + \mathbf{d})\lambda + (\mathbf{ad} - \mathbf{bc}) = \mathbf{0}$$

Aquí, $(a + d)$ es la **traza** de la matriz A ($\mathrm{tr}(A)$), y $(ad - bc)$ es el **determinante** de A ($\det(A)$). Así, la ecuación puede expresarse de manera más concisa como:

$$\lambda^{\mathbf{2}} - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

Las raíces de este polinomio cuadrático (los autovalores λ_1 y λ_2) se obtienen utilizando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

$$\lambda_{\mathbf{1,2}} = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\det(\mathbf{A})}}{\mathbf{2}}$$

El término bajo la raíz, $(\mathrm{tr}(A))^2 - 4\det(A)$, conocido como el discriminante, determina la naturaleza de los autovalores (reales distintos, reales repetidos o complejos).

Ejemplo práctico para una matriz 2x2: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. **Formar** $(A - \lambda I)$: $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$
2. **Calcular** $\det(A - \lambda I)$: $(1-\lambda)(4-\lambda) - (2)(-1) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$ $4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
3. **Resolver la ecuación cuadrática**: Usando la fórmula general, se obtiene $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$. Estos son los autovalores de la matriz A.

2.1.2. Consideraciones para Matrices de Mayor Orden (3x3 o más)

El concepto y el procedimiento fundamental son los mismos para matrices de mayor orden. Sin embargo, el cálculo del determinante y la resolución del polinomio característico pueden ser más complejos. Para matrices 3x3, se puede usar la **Regla de Sarrus** para calcular el determinante. Para órdenes superiores, se recurre a métodos de cofactores o, en la práctica computacional, a métodos numéricos.

Ejemplo práctico para una matriz 3x3: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Formar** $(A - \lambda I)$: $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$
2. **Calcular** $\det(A - \lambda I)$ **(usando Sarrus)**: $(1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + (-1)(-1)(0) + (0)(-1)(-1) - [(0)(2-\lambda)(0) + (-1)(-1)(1-\lambda) + (-1)(-1)(1-\lambda)] = 0$ $(1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$ Sacando factor común $(1-\lambda)$: $(1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 1 - 1] = 0$ $(1-\lambda)[\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2] = 0$ $(1-\lambda)[\lambda^2 - 3\lambda] = 0$ $(1-\lambda)\lambda(\lambda - 3) = 0$ Reordenando: $\lambda(\mathbf{1}-\lambda)(\lambda - \mathbf{3}) = \mathbf{0}$
3. **Resolver la ecuación característica**: Las raíces son los autovalores: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

2.2. Obtención de Autovectores

Una vez que se han calculado los autovalores (λ_i), el siguiente paso es encontrar los autovectores asociados a cada uno de ellos. Para cada autovalor λ_i, se sustituye su valor en la ecuación original $(A - \lambda_i I)x = 0$. Este sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** y, por definición, tendrá **infinitas soluciones no triviales** para x. Esto ocurre porque la matriz $(A - \lambda_i I)$ es singular (su determinante es cero). El conjunto de todas las soluciones forma el "**autoespacio**.ªsociado a λ_i. Se busca una base para este autoespacio, que será el autovector o un conjunto de autovectores linealmente independientes. Por cada autovalor, siempre habrá **al menos un autovector**.
Para encontrar el autovector (o los autovectores), se resuelve este sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo, utilizando la **eliminación Gaussiana**. Al resolver la ecuación resultante (o ambas en el caso 2x2), se encontrará la relación entre las componentes de x. Generalmente, se elige una variable libre para expresar las demás, dando un vector paramétrico, y luego se elige un valor particular no nulo para el parámetro para obtener un autovector específico.

Ejemplo práctico para autovectores de la matriz 2x2: Matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Autovalores: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$.

- **Para** $\lambda_1 = 3$: Sustituir en $(A - 3I)x = 0$: $\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ -1 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Esto produce el sistema: $-2x + 2y = 0 \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y$ $-x + y = 0 \Rightarrow x = y$ Si elegimos $y = 1$, entonces $x = 1$. Así, el autovector asociado a $\lambda_1 = 3$ es $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Para** $\lambda_2 = 2$: Sustituir en $(A - 2I)x = 0$: $\begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ -1 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Esto produce el sistema: $-x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$ $-x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$ Si elegimos $y = 1$, entonces $x = 2$. Así, el autovector asociado a $\lambda_2 = 2$ es $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo práctico para autovectores de la matriz 3x3: Matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Autovalores: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

- **Para** $\lambda_1 = 0$: Sustituir en $(A - 0I)x = 0 \Rightarrow Ax = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{aligned}$$

  De la primera ecuación, $x = y$. De la tercera, $z = y$. Sustituyendo en la segunda: $-y + 2y - y = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Las soluciones son de la forma (y, y, y). Si elegimos $y = 1$, el autovector es $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Para** $\lambda_2 = 1$: Sustituir en $(A - 1I)x = 0$: $\begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

  Como $y = 0$, la segunda ecuación se reduce a $-x - z = 0 \Rightarrow x = -z$. Las soluciones son de la forma $(-z, 0, z)$. Si elegimos $z = 1$, el autovector es $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Para** $\lambda_3 = 3$: Sustituir en $(A - 3I)x = 0$: $\begin{pmatrix} 1-3 & -1 & 0 \\ -1 & 2-3 & -1 \\ 0 & -1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -2x - y &= 0 \\ -x - y - z &= 0 \\ -y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

  De la primera ecuación, $y = -2x$. De la tercera ecuación, $y = -2z$. Esto implica $x = z$. Sustituyendo $y = -2x$ en la segunda ecuación: $-x - (-2x) - z = 0 \Rightarrow -x + 2x - z = 0 \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow x = z$. Las soluciones son de la forma $(x, -2x, x)$. Si elegimos $x = 1$, el autovector es $\mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Errores Comunes en el Proceso de Cálculo

Es fundamental estar atento a los errores frecuentes que pueden surgir durante el cálculo de autovalores y autovectores.

- **Errores algebraicos**: Son los más comunes, especialmente al calcular determinantes de matrices grandes o al resolver polinomios de alto grado. Un error de signo puede llevar a autovalores incorrectos.
- **Olvidar la forma de la ecuación característica**: No saber plantear $\det(A - \lambda I) = 0$ correctamente.
- **Malinterpretar raíces complejas o repetidas**: No comprender cómo se expresan las soluciones de sistemas dinámicos cuando los autovalores son complejos (oscilaciones) o repetidos (términos multiplicados por t o k).
- **No verificar que el autovector no sea nulo**: Por definición, un autovector debe ser no nulo. Si solo se obtiene $x = 0$, es probable que haya un error en la obtención del autovalor o en el planteamiento.
- **Interpretar erróneamente un autovalor cero**: Un autovalor de cero implica que la matriz es singular (no invertible). Esto significa que existe una dirección (autovector) a lo largo de la cual la transformación çolapsa.[el] espacio, mapeando ese vector al vector nulo. Si $\det(A) = 0$, siempre debe haber un $\lambda = 0$ como autovalor; si no aparece en los cálculos, hay un error.
- **Perder un factor en el polinomio característico**: Al factorizar el polinomio, asegurar que el grado resultante sea n para una matriz $n \times n$.
- **Aceptar diagonalización sin chequear la dimensión del autoespacio**: La suma de las dimensiones de los autoespacios debe ser igual a n para que la matriz sea diagonalizable.
- **Confundir criterios de estabilidad entre tiempo continuo y discreto**: Este es un error crucial que puede llevar a conclusiones erróneas sobre el comportamiento del sistema.

2.4. Conclusión Parcial: Cálculo

El cálculo de autovalores y autovectores, aunque exige rigor algebraico, es un proceso sistemático y estructurado. Este procedimiento se basa primordialmente en la resolución de polinomios característicos y subsiguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneas. La piedra angular para la obtención de autovalores reside en la **ecuación característica** $\det(A - \lambda I) = 0$, que convierte la tarea de identificar direcciones invariantes en un problema de hallar las raíces de un polinomio. Una vez obtenidos los autovalores, se procede a resolver el sistema $(A - \lambda_i I)x = 0$ para determinar los autovectores asociados. Dominar estas técnicas es el cimiento indispensable para cualquier análisis de estabilidad dinámico, permitiendo a los profesionales modelar y predecir el comportamiento de las variables con una precisión vital en diversos campos.

3. Hipótesis y Propiedades Fundamentales de las Matrices

Para que una matriz tenga autovalores y autovectores en el sentido tradicional, la **matriz A debe ser cuadrada** (es decir, tener el mismo número de filas que de columnas). Sin esta condición, el concepto de autovalor y autovector tal como se define en $Ax = \lambda x$ no es aplicable directamente, ya que se generaría una incompatibilidad dimensional.

3.1. Condiciones y Regularidades Típicas

Las condiciones típicas impuestas para el análisis de autovalores en sistemas dinámicos incluyen:

- **Linealidad**: La matriz A representa un sistema lineal. Aunque los sistemas económicos reales son a menudo no lineales, la técnica de **linealización** permite aproximar su comportamiento localmente alrededor de un equilibrio, transformando el problema en uno lineal donde los autovalores son aplicables.
- **Realidad de los coeficientes**: Los elementos de la matriz son números reales. Sin embargo, los autovalores pueden ser números reales o complejos.
- **Independencia lineal**: Para obtener un conjunto completo de autovectores que formen una base, a menudo se requiere que la matriz sea diagonalizable, lo que implica un conjunto de autovectores linealmente independientes.

3.2. Propiedades Clave Adicionales

Los autovalores y autovectores poseen propiedades fundamentales que revelan información importante sobre la matriz:

- La **suma de los autovalores es igual a la traza** de la matriz ($\text{tr}(A)$).
- El **producto de los autovalores es igual al determinante** de la matriz ($\det(A)$).

3.3. Casos Especiales de Matrices y sus Implicaciones

3.3.1. Matriz Singular y Autovalor Cero

Si una matriz es **singular** (cuyo determinante es cero), siempre tiene **al menos un autovalor igual a cero**. Esto implica que existe una dirección (un autovector) a lo largo de la cual la transformación çolapsa.[el] espacio, mapeando ese vector al vector nulo. Por ejemplo, una matriz de proyección en un plano tendría un autovalor cero para los vectores perpendiculares al plano, que son proyectados al origen.

3.3.2. Multiplicidad Algebraica y Geométrica

Un autovalor puede repetirse; esto se conoce como **multiplicidad algebraica** (cuántas veces es raíz del polinomio característico). La **multiplicidad geométrica** es el número de autovectores linealmente independientes asociados a un autovalor dado. La multiplicidad geométrica es siempre menor o igual que la algebraica. Si la multiplicidad geométrica es menor que la algebraica para algún autovalor, la matriz **no es diagonalizable** y puede requerir el uso de la forma de Jordan para su análisis.

3.3.3. Diagonalización de Matrices

Una matriz A es **diagonalizable** si existe una base de autovectores. Esto ocurre si y solo si la multiplicidad algebraica y geométrica coinciden para todos sus autovalores. En este caso, la matriz A puede escribirse como:

$$\mathbf{A = PDP^{-1}}$$

donde D es una **matriz diagonal** que contiene los autovalores en su diagonal principal, y P es una matriz cuyas columnas son los autovectores linealmente independientes de A. Esta descomposición simplifica enormemente el cálculo de potencias de la matriz (A^k) y exponenciales matriciales (e^{At}), que son fundamentales en las soluciones de sistemas dinámicos.

3.3.4. Matrices Simétricas Reales

Un caso especial y muy importante son las **matrices simétricas reales** ($A = A^\top$). Estas matrices siempre tienen **autovalores reales** y existe una **base ortonormal de autovectores**. Esto permite una descomposición espectral $A = QDQ^\top$ (donde Q es una matriz ortogonal), que es fundamental en optimización cuadrática y análisis de componentes principales (PCA).

4. Análisis de Estabilidad y Clasificación de Sistemas Dinámicos

La verdadera potencia de los autovalores, tanto en economía matemática como en ingeniería, radica en su capacidad para determinar la **estabilidad dinámica** de un sistema. La naturaleza (reales o complejos, positivos o negativos) y la magnitud de los autovalores revelan si las trayectorias de las variables convergerán hacia un equilibrio, divergirán de él, o si exhibirán un comportamiento oscilatorio. La **estabilidad dinámica** es la propiedad crucial que indica si las variables de un sistema tienden a un estado de equilibrio a medida que el tiempo avanza.

4.1. Criterios de Estabilidad por Tipo de Tiempo

Los criterios de estabilidad difieren fundamentalmente según si el sistema opera en tiempo continuo o discreto. Esta **analogía continuo-discreta** es crucial para vincular las intuiciones de ambos dominios en el análisis económico dinámico.

- **Sistemas en Tiempo Continuo (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - EDO)**: Un equilibrio es **asintóticamente estable** si la **parte real de todos los autovalores es estrictamente negativa** ($\Re(\lambda_i) < 0$). Si alguna parte real es positiva, el sistema es inestable. Si alguna parte real es cero, el sistema puede ser marginalmente estable.
- **Sistemas en Tiempo Discreto (Ecuaciones en Diferencias - EED)**: Un equilibrio es **asintóticamente estable** si el **módulo (valor absoluto) de todos los autovalores es menor que 1** ($|\lambda_i| < 1$). Si algún módulo es mayor que 1, el sistema es inestable. Si algún módulo es igual a 1, el sistema puede ser marginalmente estable.

4.2. Clasificación de Equilibrios en Diagramas de Fase (para sistemas 2D)

La interpretación geométrica de autovalores y autovectores es crucial para visualizar la dinámica de los sistemas. En sistemas de dos variables (2D), los **diagramas de fase** son herramientas gráficas que representan las trayectorias del sistema en el .^{es}pacio de fase". Los autovalores determinan la naturaleza de los puntos de equilibrio en estos diagramas:

- **Autovalores Reales Distintos**:
  - **Nodo Estable**: Si todos los autovalores reales son estrictamente negativos ($\Re(\lambda) < 0$ para tiempo continuo, $|\lambda| < 1$ para tiempo discreto), las trayectorias convergen suavemente al equilibrio. El sistema es asintóticamente estable.
  - **Nodo Inestable**: Si todos los autovalores reales son estrictamente positivos ($\Re(\lambda) > 0$ o $|\lambda| > 1$), las trayectorias divergen del equilibrio. El sistema es inestable.
  - **Punto de Silla**: Si los autovalores reales tienen signos opuestos (uno positivo y otro negativo), el equilibrio es un punto de silla. Las trayectorias se acercan al equilibrio en una dirección (dada por el autovector del autovalor negativo) y se alejan en otra (dada por el autovector del autovalor positivo). Un punto de silla es inestable.
- **Autovalores Reales Repetidos**:
  - **Nodo Degenerado o Estrella**: Si los autovalores son repetidos y negativos, las trayectorias convergen al origen. Si son positivos, divergen.
- **Autovalores Complejos Conjugados**: Cuando el discriminante es negativo, los autovalores son números complejos.
  - **Foco Estable**: Si la parte real de los autovalores complejos es negativa ($\Re(\lambda) < 0$ o $|\lambda| < 1$), las trayectorias convergen en espiral hacia el equilibrio. El sistema es asintóticamente estable y exhibe oscilaciones amortiguadas.
  - **Foco Inestable**: Si la parte real de los autovalores complejos es positiva ($\Re(\lambda) > 0$ o $|\lambda| > 1$), las trayectorias divergen en espiral del equilibrio. El sistema es inestable y exhibe oscilaciones explosivas.
  - **Centro/Vórtice**: Si la parte real de los autovalores complejos es cero ($\Re(\lambda) = 0$ o $|\lambda| = 1$), las trayectorias oscilan perpetuamente en ciclos cerrados alrededor del equilibrio, sin converger ni divergir. El sistema es estable en el sentido de Lyapunov, pero no asintóticamente estable.
- **Autovalor Cero**: Si uno de los autovalores es cero y el otro es negativo, existe una **línea de equilibrios estables** (no asintóticamente estables). Si el otro es positivo, una línea de equilibrios inestables.

Este análisis permite a los economistas no solo identificar un punto de equilibrio, sino también entender su çarácter"dinámico y su predictibilidad a lo largo del tiempo. Geométricamente, los autovalores y autovectores nos muestran las líneas que no se "doblan"bajo la transformación y cómo la imagen del círculo unitario se convierte en una elipse, con los autovectores indicando los ejes de esta elipse y los autovalores sus longitudes.

4.3. Conclusión Parcial: Análisis de Estabilidad y Aplicaciones

La interpretación de los autovalores es indispensable para clasificar la naturaleza de los equilibrios y predecir el comportamiento a largo plazo de los sistemas dinámicos. Desde la convergencia estable de poblaciones hasta los complejos ciclos económicos, la información codificada en estas raíces características.[es] el pilar del análisis dinámico en economía. Su aplicación abarca desde la demografía hasta la modelización de mercados, permitiendo a los economistas una comprensión profunda de la estabilidad y la trayectoria de las variables fundamentales, trascendiendo las limitaciones de un análisis puramente estático.

5. Aplicaciones de Autovalores y Autovectores

Los autovalores y autovectores son herramientas analíticas poderosas con diversas aplicaciones transversales en múltiples campos, facilitando tanto el análisis teórico como la formulación de políticas y el diseño de sistemas.

5.1. Aplicaciones en Economía Matemática

En el ámbito de la economía, los usos de autovalores y autovectores son variados y cruciales para el análisis dinámico.

- **Estabilidad de Modelos Dinámicos**: Constituyen la base para analizar la estabilidad de equilibrios en modelos económicos que se rigen por ecuaciones diferenciales (tiempo continuo) y ecuaciones en diferencias (tiempo discreto). Esto permite predecir si variables clave como precios, ingresos, producción o población convergerán a un equilibrio, divergirán de él, o si exhibirán ciclos a lo largo del tiempo. Ejemplos incluyen el modelo de crecimiento de Solow o los modelos de ajuste de inventarios. Si los autovalores de un modelo de crecimiento tienen partes reales negativas, se traduce en una **convergencia monótona hacia el equilibrio estacionario**.
- **Modelos de Crecimiento Poblacional (Matrices de Leslie)**: En demografía, las **Matrices de Leslie** son ampliamente utilizadas para modelar el crecimiento de poblaciones estructuradas por edades, considerando tasas de fertilidad y supervivencia en diferentes grupos etarios. El **Teorema de Perrón-Frobenius** juega un papel fundamental aquí. Este teorema, aplicable a matrices no negativas e irreducibles, garantiza la existencia de un autovalor dominante (el de mayor magnitud real y positivo) y un autovector asociado con componentes estrictamente positivas. Este **autovalor dominante se interpreta como la tasa de crecimiento asintótica de la población a largo plazo**, mientras que el autovector asociado representa la distribución de edades estable que la población alcanzará. Esto es crucial para la planificación demográfica y la proyección de recursos.
- **Análisis de Ciclos Económicos**: En modelos macroeconómicos, la presencia de autovalores complejos puede indicar la existencia de ciclos económicos endógenos. El signo de la parte real determina si estos ciclos son amortiguados (convergen a un equilibrio estable) o explosivos (generan inestabilidad).
- **Linealización de Sistemas No Lineales**: Los sistemas económicos reales son a menudo no lineales. La teoría de autovalores es aplicable a estos últimos a través de la **linealización**, que permite analizar su estabilidad local alrededor de un punto de equilibrio. Para ello, se utiliza la **matriz Jacobiana** (una matriz de derivadas parciales) evaluada en el punto de equilibrio, y sus autovalores determinan la estabilidad (estable, inestable, punto de silla, etc.) de dicho equilibrio en su vecindad.
- **Modelos de Insumo-Producto (Leontief)**: Utilizan autovalores para estudiar la viabilidad y sostenibilidad de una economía. La viabilidad de la economía requiere que el radio espectral de la matriz de coeficientes técnicos sea menor que 1 ($\rho(C) < 1$). Si el radio espectral cruza 1, la demanda total diverge (inviabilidad).
- **Cadenas de Markov y Ratings**: El autovalor 1 y su autovector estacionario describen las participaciones de largo plazo en un sistema. Los otros autovalores (en módulo) miden la velocidad de convergencia al estado estacionario.

5.2. Aplicaciones en Ciencia de Datos

En ciencia de datos, los autovectores son uno de los objetos matemáticos con más aplicaciones, ya que proporcionan **información estadística sobre las columnas y los renglones** de una matriz que representa un conjunto de datos.

- **Análisis de Componentes Principales (PCA)**: Es una técnica de reducción de dimensionalidad que utiliza autovalores y autovectores de **matrices de covarianza**. Los autovectores de la matriz de covarianzas dan las **componentes principales**, que son las direcciones de mayor varianza en los datos, mientras que los autovalores asociados indican la magnitud de esa varianza. Esto permite simplificar datasets complejos manteniendo la mayor parte de su información.

6. Conexiones Interdisciplinarias y Ampliación de Conceptos

Los autovalores y autovectores actúan como puentes fundamentales entre diversas áreas de la matemática, la economía, la ingeniería y la ciencia de datos. Su comprensión no solo enriquece el conocimiento matemático, sino que abre la puerta a aplicaciones concretas en el mundo real.

6.1. Conexiones Clave

- **Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias (EDO/EED)**: Son la herramienta principal para resolver y analizar la estabilidad de sistemas dinámicos lineales. La solución general de estos sistemas se construye a partir de exponenciales (en continuo) o potencias (en discreto) con los autovalores en los exponentes o bases, y los autovectores determinan las direcciones de esas soluciones.
- **Formas Cuadráticas y Optimización**: Los autovalores de la matriz Hessiana (o Hessiana orlada en problemas restringidos) se utilizan para determinar la definitividad de las formas cuadráticas, lo cual es esencial para las **condiciones de segundo orden** en problemas de optimización. Los signos de los autovalores permiten clasificar un punto crítico como máximo, mínimo o punto de silla.
- **Descomposición en Valores Singulares (SVD)**: Aunque distinta, se relaciona con autovalores ya que los autovalores de $A^\top A$ son los cuadrados de los valores singulares de A.

6.2. Red Conceptual Básica

La comprensión de los autovalores y autovectores puede estructurarse en una red conceptual que abarca sus fundamentos, relaciones y aplicaciones.

- **Conceptos Fundamentales**:
  - **Autovalor (λ)**: Un escalar que representa el factor de escala de un vector en una transformación lineal.
  - **Autovector (x)**: Un vector no nulo cuya dirección no cambia bajo una transformación lineal, solo se escala por el autovalor.
  - **Matriz (A)**: Representación de la transformación lineal o de las interacciones en un sistema dinámico.
  - **Ecuación Característica**: Ecuación polinomial $\det(A - \lambda I) = 0$ cuyas raíces son los autovalores.
- **Axiomas/Postulados Clave**:
  - **Ecuación Fundamental de Autovalores**: $Ax = \lambda x$.
  - **Condición de Existencia de Autovectores no Triviales**: Requiere que $\det(A - \lambda I) = 0$, asegurando que el sistema homogéneo tiene soluciones más allá del vector cero.
- **Relaciones Clave entre Conceptos**:
  - **Autovalores $\leftrightarrow$ Raíces del Polinomio Característico**: Los autovalores se obtienen directamente al resolver las raíces del polinomio característico de la matriz.
  - **Autovalores $\leftrightarrow$ Estabilidad del Sistema Dinámico**: La naturaleza (real/compleja, signo de la parte real, magnitud) de los autovalores determina directamente la estabilidad y el comportamiento a largo plazo de las trayectorias de un sistema.
  - **Naturaleza de Autovalores $\leftrightarrow$ Clasificación de Equilibrios**: Los autovalores permiten clasificar los puntos de equilibrio en sistemas dinámicos como nodos (estables/inestables), focos (estables/inestables), puntos de silla o centros.
- **Utilidades Principales en Economía Matemática**:
  - **Análisis de Estabilidad Dinámica**: Permite determinar si modelos económicos de tiempo continuo (EDO) o discreto (EED) convergen, divergen u oscilan hacia o desde un equilibrio.
  - **Predicción de Comportamiento a Largo Plazo**: Fundamental para prever la evolución de variables económicas clave, como la población (Matrices de Leslie, Teorema de Perrón-Frobenius) o los precios de equilibrio.
  - **Linealización de Sistemas No Lineales**: Facilita el análisis de estabilidad local de sistemas complejos al aproximarlos linealmente en la vecindad de un equilibrio.
- **Secuencia Paso a Paso de Comprensión del Tema**:
  - **1. Definición Inicial**: Comprender qué son los autovalores y autovectores en el contexto de las transformaciones lineales.
  - **2. Cálculo Práctico**: Aprender el procedimiento para obtener los autovalores (resolviendo la ecuación característica) y, a partir de ellos, los autovectores asociados.
  - **3. Interpretación de Estabilidad**: Interpretar la naturaleza de los autovalores para clasificar la estabilidad de los equilibrios del sistema (es decir, si las variables convergen, divergen u oscilan).
  - **4. Aplicación Económica**: Aplicar estos conocimientos para analizar modelos económicos concretos, revelando la dinámica subyacente y la trayectoria de las variables relevantes.

7. Conclusión Global

Los autovalores y autovectores son pilares analíticos en el estudio de sistemas lineales y dinámicos, trascendiendo la mera descripción estática para ofrecer una visión profunda del comportamiento de las variables a lo largo del tiempo. Al caracterizar las direcciones invariantes y las tasas de escalamiento de una transformación, permiten diagnosticar la estabilidad de los equilibrios, predecir la convergencia o divergencia de variables económicas (como precios y poblaciones), e incluso anticipar la aparición de ciclos económicos. Su aplicación abarca desde la resolución de ecuaciones diferenciales y en diferencias hasta la linealización de sistemas complejos, convirtiendo estos conceptos en herramientas indispensables para los profesionales que buscan no solo identificar un estado, sino comprender su trayectoria y su destino a lo largo del tiempo. Dominar estos conceptos permite ir más allá de la simple descripción de un estado de equilibrio, adentrándose en el **cómo** y **por qué** las variables se mueven hacia o lejos de dicho equilibrio. En síntesis, los autovalores nos dicen "**cuánto**"se estira o se reduce un sistema en ciertas direcciones privilegiadas, mientras que los autovectores nos dicen "**en qué dirección**.ºcurre ese cambio. Así, juntos proporcionan una especie de .ªDN"del sistema lineal. Su dominio es esencial para cualquier análisis dinámico y predictivo riguroso en ciencias, ingeniería y economía.

Preguntas Frecuentes (FAQs) y Glosario

Preguntas Frecuentes (FAQs)

Para facilitar la comprensión, se abordan algunas preguntas comunes:

1. **¿Cuál es la diferencia fundamental entre autovalores y autovectores?** Los **autovalores** son **escalares** que indican cuánto se .estira.o çontraeün vector en una dirección particular. Los **autovectores** son los **vectores no nulos** cuyas direcciones no cambian bajo la transformación lineal, solo se escalan por el autovalor correspondiente.

2. **¿Por qué son importantes los autovalores para la estabilidad de un sistema?** Los autovalores, particularmente la parte real para sistemas continuos y el módulo para discretos, determinan si las trayectorias del sistema convergen a un equilibrio (estable), divergen de él (inestable) u oscilan alrededor sin converger (centro o foco). Son la clave para entender la predictibilidad del comportamiento a largo plazo.

3. **¿Cómo se relaciona la linealización con los autovalores en sistemas no lineales?** Para analizar la estabilidad local de un sistema no lineal, este se linealiza alrededor de un punto de equilibrio mediante la matriz jacobiana. Los autovalores de esta matriz jacobiana en ese punto de equilibrio determinan la estabilidad (estable, inestable, punto de silla, etc.) de dicho equilibrio en su vecindad.

4. **¿Qué es el Teorema de Perrón-Frobenius y cuál es su aplicación económica?** El Teorema de Perrón-Frobenius es fundamental para matrices no negativas e irreducibles, garantizando la existencia de un autovalor dominante real y positivo, con un autovector asociado de componentes positivas. En economía, se aplica en **modelos demográficos** (Matrices de Leslie) para predecir la tasa de crecimiento poblacional a largo plazo y la **distribución de edades estable**.

5. **¿Cuál es la relación entre los autovalores y la ecuación característica?** Los autovalores son las **raíces** del polinomio característico que se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz menos λ veces la matriz identidad, es decir, $\det(A - \lambda I) = 0$. Resolver esta ecuación algebraica es el primer paso para encontrar los autovalores de una matriz.

Glosario de Términos Clave

- **Autoespacio (o Espacio Propio)**: El conjunto de todos los autovectores asociados a un autovalor específico, incluyendo el vector nulo.
- **Diagonalización**: Proceso de transformar una matriz A en una matriz diagonal D utilizando una matriz de autovectores P, tal que $A = PDP^{-1}$.
- **Estabilidad Dinámica**: Propiedad de un sistema que indica si sus variables tienden a un estado de equilibrio a medida que el tiempo avanza.
- **Foco**: Tipo de equilibrio donde las trayectorias se mueven en espiral alrededor del equilibrio.
- **Linealización**: Técnica para analizar la estabilidad local de sistemas no lineales, aproximándolos linealmente alrededor de un punto de equilibrio.
- **Matriz Jacobiana (J)**: Matriz de derivadas parciales utilizada para linealizar sistemas no lineales.
- **Matrices de Leslie**: Matrices usadas en demografía para modelar el crecimiento de poblaciones estructuradas por edades.
- **Multiplicidad Algebraica**: El número de veces que un autovalor es una raíz del polinomio característico.
- **Multiplicidad Geométrica**: El número de autovectores linealmente independientes asociados a un autovalor.
- **Nodo**: Tipo de equilibrio donde las trayectorias convergen o divergen monótonamente.
- **Polinomio Característico**: El polinomio en λ que resulta de calcular $\det(A - \lambda I)$.
- **Punto de Silla**: Tipo de equilibrio inestable donde las trayectorias se acercan en una dirección y se alejan en otra.
- **Radio Espectral ($\rho(A)$)**: El mayor de los módulos de los autovalores de una matriz A.
- **Sistema Homogéneo**: Un sistema de ecuaciones lineales donde todas las constantes son cero, como $(A - \lambda I)x = 0$.
- **Traza ($\mathbf{tr}(A)$)**: La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada, igual a la suma de sus autovalores.
- **Vórtice (o Centro)**: Tipo de equilibrio donde las trayectorias oscilan en ciclos cerrados alrededor del equilibrio sin converger ni divergir.
- **Determinante ($\det(A)$)**: Un escalar asociado a una matriz cuadrada que indica si la matriz es invertible y cómo escala el volumen. Es igual al producto de sus autovalores.

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD, OPTIMINZACION Y FORMAS CUADRATICAS

@toobaziti

Disclaimer: Este documento ha sido elaborado a partir de la grabación de una clase, el slide visto en clase y el texto recomendados. Puede contener errores u omisiones asociados a la calidad del audio, cortes involuntarios o dificultades de transcripción. Por favor, consúltese siempre la fuente original de la grabación si se requiere confirmación de algún detalle.

Índice

1. Formas Cuadráticas: Fundamentos y Clasificación por Signo **1**
1.1. Definición y Expresión Matricial . . . 1
1.1.1. Concepto de Forma Cuadrática . . . 1
1.1.2. Expresión Matricial General . . . 1
1.1.3. Simetría de la Matriz Asociada . . . 1
1.2. Signo de la Forma Cuadrática . . . 1
1.2.1. Definiciones de Signo . . . 1
1.2.2. Criterios para Determinar el Signo . . . 2
1.3. Formas Cuadráticas Restringidas . . . 3
1.3.1. Criterio de la Matriz Bordeada (Orleada) . . . 3
1.4. Problema de Consolidación: Signo de Forma Cuadrática Restringida . . . 4
1.5. Conclusiones Parciales: Formas Cuadráticas . . . 5

2. Optimización Libre **5**
2.1. Condiciones Necesarias de Primer Orden (CNPO) . . . 5
2.1.1. Definición y Concepto . . . 5
2.1.2. Contexto y Límites . . . 6
2.1.3. Ejemplo de CNPO . . . 6
2.2. Condiciones Suficientes de Segundo Orden (CSSO) con la Matriz Hessiana . . . 6
2.2.1. Definición de Matriz Hessiana . . . 6
2.2.2. Criterios de Clasificación (Definitividad) . . . 6
2.2.3. Ejemplo de CSSO . . . 7
2.3. Teorema de la Envolvente (Envelope Theorem) . . . 7
2.3.1. Concepto y Utilidad . . . 7
2.3.2. Formulación (Optimización Libre) . . . 8
2.3.3. Ejemplo de Aplicación . . . 8
2.4. Problema de Consolidación: Optimización Libre de Costos . . . 8
2.5. Conclusiones Parciales: Optimización Libre . . . 9

3. Optimización con Restricciones de Igualdad **10**
3.1. El Método de los Multiplicadores de Lagrange . . . 10
3.1.1. Formulación de la Función Lagrangiana . . . 10
3.1.2. Condiciones Necesarias de Primer Orden (CNPO) . . . 10
3.1.3. Condiciones Suficientes de Segundo Orden (CSSO) con el Hessiano Orlado . . . 10
3.2. Interpretación Económica de los Multiplicadores de Lagrange . . . 11
3.2.1. Concepto de Precio Sombra . . . 11
3.2.2. Utilidad y Significado Económico . . . 12
3.3. Problema de Consolidación: Maximización de Utilidad del Consumidor . . . 12
3.4. Conclusiones Parciales: Optimización con Restricciones de Igualdad . . . 13

4. Optimización con Restricciones de Desigualdad (Condiciones KKT) **13**
4.1. Las Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) . . . 14
4.1.1. Formulación General . . . 14
4.1.2. Condiciones de Primer Orden KKT . . . 14
4.2. Calificación de Restricciones (Constraint Qualification - CQ) . . . 14
4.2.1. Condiciones Suficientes para que las Restricciones Caliquen . . . 15
4.2.2. Contraejemplo de Falla de CQ . . . 15
4.3. Concavidad/Convexidad y Suficiencia Global en KKT . . . 15
4.3.1. Teorema de Arrow-Enthoven . . . 15
4.3.2. Programación Cóncava . . . 15
4.4. Problema de Consolidación: Maximización de Beneficios con Restricción de Capacidad . . . 15
4.5. Conclusiones Parciales: Optimización con Restricciones de Desigualdad (Condiciones KKT) . . . 17

5. Concavidad y Convexidad de Funciones: Fundamentos y Aplicaciones **17**
5.1. Definiciones Formales . . . 17
5.1.1. Cóncava y Convexa . . . 17
5.1.2. Cuasicóncava y Cuasiconvexa . . . 18
5.2. Contexto y Prerrequisitos en Economía . . . 18
5.2.1. Aplicaciones Prácticas en Economía . . . 18
5.2.2. Prerrequisitos Esenciales . . . 18
5.3. Hipótesis y Regularidad . . . 19
5.3.1. Contraejemplo de Falla de Regularidad . . . 19
5.4. Criterios de Concavidad y Convexidad basados en Derivadas . . . 19
5.4.1. Para Funciones de una Variable . . . 19
5.4.2. Para Funciones de Múltiples Variables (Matriz Hessiana) . . . 19
5.4.3. Para Cuasiconcavidad/Cuasiconvexidad (Matriz Bordeada B) . . . 19
5.5. Procedimiento para Verificar Concavidad/Convexidad (Matriz Hessiana) . . . 20
5.6. Garantías y Límites . . . 20
5.7. Interpretación Geométrica y Económica . . . 20
5.7.1. Representación Gráfica . . . 20
5.7.2. Traducción Económica . . . 21
5.8. Problema de Consolidación: Concavidad de Función de Utilidad . . . 21
5.9. Conclusiones Parciales: Concavidad y Convexidad . . . 22

6. Red Conceptual **22**

7. Preguntas Frecuentes (FAQs) **24**

1. Formas Cuadráticas: Fundamentos y Clasificación por Signo

Las formas cuadráticas constituyen un pilar fundamental en el análisis matemático aplicado a la economía, especialmente en el ámbito de la optimización. Se definen como expresiones polinómicas homogéneas de segundo grado, lo que significa que cada uno de sus términos tiene un grado total de dos. Su importancia radica en que la curvatura de las funciones, un aspecto crítico para determinar si un punto es un máximo, un mínimo o un punto de silla, puede ser capturada y analizada a través de estas formas. Este concepto es esencial para las condiciones de segundo orden en diversos problemas de optimización. Comprender el signo de una forma cuadrática es clave, ya que su definitividad está directamente ligada a la naturaleza de los extremos locales de una función.

1.1. Definición y Expresión Matricial

1.1.1. Concepto de Forma Cuadrática

Una **forma cuadrática** es una expresión polinómica homogénea de grado dos [1]. Esto implica que cada término de la expresión debe tener un grado total de dos.

- **Ejemplos de Formas Cuadráticas:** $4x^2 - xy + 3y^2$ y $x^2 + 2xy - yw - 7w^2$ [1].
- **No son Formas Cuadráticas:** $3x + 4x^2y^3 - 2yz$ (no es homogénea por tener términos de distinto grado) y $4x - 9y + z$ (homogénea pero de grado uno) [1].

1.1.2. Expresión Matricial General

Toda forma cuadrática $F(\mathbf{x})$ puede ser representada de manera matricial como $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ [1]. Donde:

- $\mathbf{x}$ es un vector columna de variables, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ [1].
- $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de coeficientes a_{ij} [1].

La expresión general es:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

1.1.3. Simetría de la Matriz Asociada

La matriz $\mathbf{A}$ asociada a una forma cuadrática **siempre puede hacerse simétrica** [2]. Esto no significa que siempre lo sea originalmente, sino que, si no lo es, se puede transformar en una matriz simétrica equivalente para los fines del análisis [2]. Para lograr la simetría, los elementos fuera de la diagonal (es decir, a_{ij} y a_{ji} para $i \neq j$) se asignan como la mitad del coeficiente total del término x_ix_j en la forma cuadrática, dividido por 2. Los elementos de la diagonal principal (a_{ii}) mantienen sus coeficientes originales sin dividir [2].

1.2. Signo de la Forma Cuadrática

El **signo de una forma cuadrática** es crucial para determinar la naturaleza de los puntos críticos en problemas de optimización, ya que su definitividad se correlaciona con la concavidad o convexidad local de una función [3].

1.2.1. Definiciones de Signo

Dependiendo de los valores que toma $F(\mathbf{x})$ para cualquier vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, se definen las siguientes clasificaciones [3, 4]:

- **Definida Positiva (DP):** $F(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. **Ejemplo:** $F = 3x^2 + 5y^2$ [4].
- **Definida Negativa (DN):** $F(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. **Ejemplo:** $F = -x^2 - 4y^2$ [4].
- **Semidefinida Positiva (SDP):** $F(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y puede anularse para algún $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. **Ejemplo:** $F = (2x - y)^2 + 3z^2$ (se anula para $(1, 2, 0)$) [4].

- **Semidefinida Negativa (SDN):** $F(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y puede anularse para algún $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. **Ejemplo:** $F = -5x^2 - (y - 3z)^2$ (se anula para $(0, 3, 1)$) [4].
- **Indefinida:** $F(\mathbf{x})$ toma valores tanto positivos como negativos para diferentes $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. **Ejemplo:** $F = 3x^2 - y^2$ [4].

Clave: La matriz simétrica $\mathbf{A}$ asociada a la forma cuadrática tiene el mismo signo que la forma [5, 6].

1.2.2. Criterios para Determinar el Signo

Existen dos métodos principales para determinar el signo de una forma cuadrática libre:
1. Criterio de los Autovalores (λ_i) [5, 6]: Sea $\mathbf{A}$ la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática.

- **DP:** Todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son **positivos** ($\lambda_i > 0$ para todo i). En este caso, $F(\mathbf{x})$ solo se anula para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ [5].
- **DN:** Todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son **negativos** ($\lambda_i < 0$ para todo i) [5].
- **SDP:** Todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son **no negativos** ($\lambda_i \geq 0$ para todo i), y al menos uno es nulo ($\lambda_k = 0$ para algún k) [5].
- **SDN:** Todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son **no positivos** ($\lambda_i \leq 0$ para todo i), y al menos uno es nulo ($\lambda_k = 0$ para algún k) [5].
- **Indefinida:** Algunos autovalores son positivos y otros son negativos [5].

2. Criterio de Sylvester (Menores Principales Dominantes) [6, 7]: Este criterio evalúa el signo de los menores principales dominantes de la matriz $\mathbf{A}$. Un menor principal dominante $|\mathbf{A}_i|$ es el determinante de la submatriz formada por las primeras i filas y i columnas de $\mathbf{A}$ [7].

- **DP:** Todos los menores principales dominantes de $\mathbf{A}$ son **positivos** [6, 7]:

$$|\mathbf{A}_i| > 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

  Ejemplo: Para $F(x) = 3x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2yz + 4xz + 2xy$, la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Los menores son $|A_1| = 3 > 0$, $|A_2| = 11 > 0$, $|A_3| = 51 > 0$. Por lo tanto, F es definida positiva [8].
- **DN:** Los menores principales dominantes de $\mathbf{A}$ **alternan de signo**, comenzando con negativo [6, 8]:

$$(-1)^i |\mathbf{A}_i| > 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

  Esto significa $|A_1| < 0$, $|A_2| > 0$, $|A_3| < 0$, y así sucesivamente [8]. **Ejemplo:** Para $F(x) = -6x^2 - 12xy - 18y^2 + 4xz - 2z^2 + 6zw - 10w^2$, la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 2 & 0 \\ -6 & -18 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \end{pmatrix}$. Los menores son $|A_1| = -6 < 0$, $|A_2| = 72 > 0$, $|A_3| = -72 < 0$, $|A_4| = 72 > 0$. Por lo tanto, F es definida negativa [9].

Semidefinidas:

- **Condición Necesaria:** Si una forma cuadrática es semidefinida, entonces su determinante (es decir, el último menor principal dominante) debe ser cero: $|\mathbf{A}| = 0$ [9].
- **Condiciones Suficientes:**
  - **SDP:** Si la matriz simétrica $\mathbf{A}$ verifica que $|\mathbf{A}_i| > 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$ y $|\mathbf{A}| = 0$, entonces $F(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva [9]. **Ejemplo:** Para $F(x, y, z) = 5x^2 - 20xy + 25y^2 - 4xz + 4z^2$, la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -2 \\ -10 & 25 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Los menores son $|A_1| = 5 > 0$, $|A_2| = 25 > 0$, $|A| = 0$. Por lo tanto, F es semidefinida positiva [10].

- **SDN:** Si la matriz simétrica $\mathbf{A}$ verifica que $(-1)^i|\mathbf{A}_i| > 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$ y $|\mathbf{A}| = 0$, entonces $F(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa [10].

- **Criterio General para Semidefinidas (utilizando todos los menores principales):** Para una determinación más robusta, especialmente si los menores principales dominantes no siguen los patrones anteriores, se pueden evaluar los determinantes de *todos* los menores principales (no solo los dominantes). Se denotan como $|\tilde{A}_k|$.
  - **SDP:** Si $|\tilde{A}_k| \geq 0$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$ y $|\mathbf{A}| = 0$ [11].
  - **SDN:** Si $(-1)^k|\tilde{A}_k| \geq 0$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$ y $|\mathbf{A}| = 0$ [11]. Estos $\tilde{A}_k$ incluyen submatrices obtenidas por permutación de filas y columnas, lo que garantiza el análisis de todos los subespacios [11, 12].

1.3. Formas Cuadráticas Restringidas

Una **forma cuadrática restringida** es una forma cuadrática $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ que está limitada a un subespacio vectorial del dominio, definido por una o más **restricciones lineales** de la forma $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ [13-15].

1.3.1. Criterio de la Matriz Bordeada (Orleada)

Para determinar el signo de una forma cuadrática restringida, se utiliza una **matriz bordeada (u orleada)** $\bar{\mathbf{A}}$ [15, 16].
1. Caso de una única restricción lineal: $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$. La matriz bordeada se forma añadiendo una fila y una columna con los coeficientes de la restricción, y un cero en la esquina superior izquierda [17]:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Las reglas para determinar el signo de la forma cuadrática restringida con una restricción son [15, 17]:

- **DP:** Los menores principales dominantes $|\bar{\mathbf{A}}_i|$ son **negativos** para todo $i = 2, 3, \ldots, n$ [17]. **Ejemplo:** Para $F(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 6xy - 2yz - 4xz$ sujeto a $x + 2y + 3z = 0$, la matriz $\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Los menores son $|\bar{A}_2| = -24 < 0$, $|\bar{A}_3| = -168 < 0$. Por lo tanto, la forma es definida positiva [18].

- **DN:** Los menores principales dominantes $|\bar{\mathbf{A}}_i|$ **alternan de signo**, comenzando por positivo en $i = 2$ [17]. Es decir, $|\bar{A}_2| > 0$, $|\bar{A}_3| < 0$, etc.

- **SDP:** Si los menores principales generales (permutados) $\tilde{\bar{A}}_i$ verifican que $(-1)^i|\tilde{\bar{A}}_i| \leq 0$ para todo $i = 2, \ldots, n$ [17].

- **SDN:** Si los menores principales generales (permutados) $\tilde{\bar{A}}_i$ verifican que $(-1)^i|\tilde{\bar{A}}_i| \geq 0$ para todo $i = 2, \ldots, n$ [17].

2. Caso de m restricciones lineales: $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{B}$ tiene dimensión $m \times n$ con $m < n$ [14]. La matriz bordeada es [14, 15]:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{B}_{m\times n} \\ \mathbf{B}^T_{n\times m} & \mathbf{A}_{n\times n} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Las reglas para determinar el signo de la forma cuadrática restringida son [14, 15]:

- **DP:** $(-1)^m|\bar{\mathbf{A}}_i| > 0$ para todo $i = m+1, m+2, \ldots, n$ [14]. **Ejemplo:** Para $F(x, y, z, w) = 4x^2 - 2xy + 2xw + y^2 + 4yz + 3z^2 + 2zw + w^2$ sujeto a $x - y + 2w = 0$ y $y - 2z = 0$ (aquí $m = 2$). La matriz $\bar{\mathbf{A}}$ es una 6×6 (ver fuente [19]). Los menores relevantes son $|\bar{A}_3| = 23 > 0$ y $|\bar{A}_4| = 218 > 0$. Como $m = 2$, $(-1)^2|\bar{A}_i| = |\bar{A}_i| > 0$. La forma es definida positiva [19].

- **DN:** $(-1)^i|\bar{\mathbf{A}}_i| > 0$ para todo $i = m+1, m+2, \ldots, n$ [14].
- **SDP:** Si es semidefinida positiva, entonces $(-1)^m|\tilde{\bar{A}}_i| \geq 0$ para todo $i = m+1, \ldots, n$ y $|\bar{A}_n| = 0$ [18].
- **SDN:** Si es semidefinida negativa, entonces $(-1)^i|\tilde{\bar{A}}_i| \geq 0$ para todo $i = m+1, \ldots, n$ y $|\bar{A}_n| = 0$ [18].

Observación: Este caso general engloba a las formas cuadráticas libres (cuando $m = 0$) y al caso de una única restricción (cuando $m = 1$) [18].

1.4. Problema de Consolidación: Signo de Forma Cuadrática Restringida

Problema: Dada la forma cuadrática $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 4xz - 2yz$ sujeta a la restricción $x - y + z = 0$. Determine el signo de esta forma cuadrática restringida.
Solución Escalona:

1. **Identificar la matriz de la forma cuadrática (A) y los coeficientes de la restricción (b):** La forma cuadrática puede escribirse como $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$. Para $x^2+2y^2+3z^2+2xy-4xz-2yz$: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{33} = 3$. $2a_{12} = 2 \implies a_{12} = 1$. $2a_{13} = -4 \implies a_{13} = -2$. $2a_{23} = -2 \implies a_{23} = -1$. La matriz simétrica $\mathbf{A}$ es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   La restricción es $x - y + z = 0$, por lo tanto, los coeficientes b_i son $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $b_3 = 1$. Tenemos $m = 1$ restricción.

2. **Construir la matriz bordeada ($\bar{\mathbf{A}}$):** Dado que $m = 1$, la matriz bordeada es:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. **Calcular los menores principales dominantes de $\bar{\mathbf{A}}$ a partir de $i = m + 1 = 2$:** Necesitamos calcular $|\bar{\mathbf{A}}_2|$, $|\bar{\mathbf{A}}_3|$, y $|\bar{\mathbf{A}}_n| = |\bar{\mathbf{A}}_4|$.

   $|\bar{\mathbf{A}}_2|$**:** Determinante de la submatriz 2×2 superior izquierda:

$$|\bar{\mathbf{A}}_2| = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0)(1) - (1)(1) = -1$$

   $|\bar{\mathbf{A}}_3|$**:** Determinante de la submatriz 3×3 superior izquierda:

$$|\bar{\mathbf{A}}_3| = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Usando Sarrus o cofactores: $|\bar{\mathbf{A}}_3| = 0(1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 1(1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) + (-1)(1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1))$
   $|\bar{\mathbf{A}}_3| = 0 - 1(2 + 1) - 1(1 + 1) = -1(3) - 1(2) = -3 - 2 = -5$

   $|\bar{\mathbf{A}}_4|$**:** Determinante de la submatriz 4×4 superior izquierda, que es el determinante de $\bar{\mathbf{A}}$:

$$|\bar{\mathbf{A}}_4| = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante (puede ser laborioso manualmente, pero se puede usar expansión por cofactores o software): Expandiendo por la primera fila: $0 \cdot \text{cofactor}(0) - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Cofactor del elemento (1,2) (submatriz M_{12}): $1(2 \cdot 3 - (-1)(-1)) - 1(-1 \cdot 3 - (-1)1) + (-2)(-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1) = 1(6-1) - 1(-3+1) - 2(1-2) = 1(5) - 1(-2) - 2(-1) = 5 + 2 + 2 = 9$. Det (primer 3×3) $= 9$.

Cofactor del elemento (1,3) (submatriz M_{13}): $1(1 \cdot 3 - (-1)(-2)) - 1(-1 \cdot 3 - (-1)1) + (-2)(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) = 1(3-2) - 1(-3+1) - 2(2-1) = 1(1) - 1(-2) - 2(1) = 1 + 2 - 2 = 1$. Det (segundo 3×3) $= 1$.

Cofactor del elemento (1,4) (submatriz M_{14}): $1(1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2)) - 1(-1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) + 1(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) = 1(-1+4) - 1(1-1) + 1(2-1) = 1(3) - 1(0) + 1(1) = 3 + 0 + 1 = 4$. Det (tercer 3×3) $= 4$.

Entonces, $|\bar{\mathbf{A}}_4| = 0 - 1(9) + (-1)(1) - 1(4) = -9 - 1 - 4 = -14$.

4. **Clasificar el signo de la forma cuadrática restringida:** Tenemos los menores: $|\bar{\mathbf{A}}_2| = -1$, $|\bar{\mathbf{A}}_3| = -5$, $|\bar{\mathbf{A}}_4| = -14$. Como $m = 1$, la condición para Definida Positiva es que $|\bar{\mathbf{A}}_i|$ sea negativa para todo $i = 2, \ldots, n$. Todos los menores calculados $(-1, -5, -14)$ son negativos. Por lo tanto, la forma cuadrática $F(x, y, z)$ sujeta a $x - y + z = 0$ es **definida positiva**.

1.5. Conclusiones Parciales: Formas Cuadráticas

Las formas cuadráticas son herramientas esenciales para analizar la curvatura de funciones, sirviendo como la base matemática para las condiciones de segundo orden en la optimización. Su clasificación por signo (definida positiva, definida negativa, semidefinida o indefinida) es crucial para determinar la naturaleza de los extremos (máximos, mínimos o puntos de silla). Los criterios de los autovalores y el de Sylvester son los métodos principales para esta clasificación, con extensiones específicas para formas semidefinidas. Cuando una forma cuadrática está sujeta a restricciones lineales, se emplea la matriz bordeada, adaptando los criterios de signo para evaluar la forma dentro de un subespacio vectorial específico. Este entendimiento es fundamental para pasar al estudio de la optimización, ya sea libre o restringida, donde estas propiedades de curvatura son directamente aplicadas para la clasificación de los puntos críticos.

2. Optimización Libre

La optimización libre es la rama del cálculo que se enfoca en encontrar los valores de las variables que maximizan o minimizan una función objetivo, sin la imposición de restricciones explícitas sobre dichas variables. En esencia, busca identificar los "picos.º "valles.en la superficie que representa una función multidimensional, sin estar limitado por ningún camino o frontera predefinida. Este tipo de análisis constituye el punto de partida para comprender problemas de optimización más complejos, incluyendo aquellos con restricciones, y es fundamental para modelar el comportamiento de agentes económicos que toman decisiones en un entorno sin limitaciones directas, más allá de la propia estructura de la función. Es la base para determinar los óptimos locales y, bajo ciertas condiciones, los óptimos globales.

2.1. Condiciones Necesarias de Primer Orden (CNPO)

2.1.1. Definición y Concepto

Las **Condiciones Necesarias de Primer Orden (CNPO)** son la primera etapa en la búsqueda de los extremos de una función [20-22]. Para que una función $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ presente un extremo local (máximo o mínimo) en un punto $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, es **necesario** que la

primera diferencial de la función se anule en ese punto [20]. Esto implica que todas sus derivadas parciales de primer orden deben ser nulas en $\mathbf{x}^*$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

De manera vectorial, esto se expresa como el **gradiente de la función** igual a cero: $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

2.1.2. Contexto y Límites

Los puntos que satisfacen las CNPO se denominan **puntos críticos** o **puntos estacionarios**. Son **candidatos** a extremos locales. Sin embargo, las CNPO por sí solas no son suficientes para determinar si un punto crítico es un máximo, un mínimo o un **punto de silla**. Un punto de silla es un punto crítico donde la función es un máximo en una dirección y un mínimo en otra.

2.1.3. Ejemplo de CNPO

Para la función $f(x, y, z) = -x^3 - y^2 + 3xz + 2y - 3z^2$ [27]: Las CNPO son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -3x^2 + 3z = 0 \quad \implies z = x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y + 2 = 0 \quad \implies y = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 3x - 6z = 0 \quad \implies x = 2z \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema: Sustituyendo $z = x^2$ en la tercera ecuación, $x = 2x^2 \implies x(1 - 2x) = 0$. Esto da $x = 0$ o $x = 1/2$. Si $x = 0$, entonces $z = 0^2 = 0$. El punto crítico es $(0, 1, 0)$ [27]. Si $x = 1/2$, entonces $z = (1/2)^2 = 1/4$. El punto crítico es $(1/2, 1, 1/4)$ [27].

2.2. Condiciones Suficientes de Segundo Orden (CSSO) con la Matriz Hessiana

2.2.1. Definición de Matriz Hessiana

Para clasificar los puntos críticos, se utiliza la **matriz Hessiana ($\mathbf{H}$)** [28-30]. Es una matriz cuadrada simétrica compuesta por las segundas derivadas parciales de la función objetivo [28, 29].

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

La Hessiana es simétrica si las segundas derivadas cruzadas son continuas, según el Teorema de Schwarz (o Clairaut o Young) [28, 31, 32].

2.2.2. Criterios de Clasificación (Definitividad)

Las CSSO determinan la naturaleza de un punto crítico $\mathbf{x}^*$ evaluando el **signo de la matriz Hessiana** $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$. Se utilizan los menores principales dominantes de la Hessiana (Criterio de Sylvester) [34].

- **Mínimo Local:** Si $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ es **definida positiva** [26, 33]. Esto ocurre si todos sus menores principales dominantes son positivos ($|H_1| > 0, |H_2| > 0, \ldots, |H_n| > 0$).

- **Máximo Local:** Si $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ es **definida negativa**. Esto ocurre si sus menores principales dominantes alternan de signo, comenzando con negativo ($|H_1| < 0, |H_2| > 0, |H_3| < 0, \dots$) [30, 34, 35].
- **Punto de Silla:** Si $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ es **indefinida** [26, 33]. Esto ocurre si la matriz toma valores positivos y negativos, o los menores principales dominantes no siguen los patrones de definida positiva o definida negativa [4, 32, 35].
- **Test Inconcluso:** Si $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ es **semidefinida positiva o semidefinida negativa** [26, 37]. Se requieren análisis adicionales (como el signo de todos los menores principales o los autovalores) [35].

2.2.3. Ejemplo de CSSO

Continuando con la función $f(x, y, z) = -x^3 - y^2 + 3xz + 2y - 3z^2$ [27]: La Hessiana general es:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -6x & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \tag{8}$$

1. Evaluar en el punto crítico $(0, 1, 0)$**:**

$$\mathbf{H}(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Menores principales dominantes: $|H_1| = 0$ [38]. $|H_2| = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = 0$ [38]. $|H_3| = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 0 \cdot (\dots) - 0 \cdot (\dots) + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3(0 - (-6)) = 18$ [38]. Como $|H_1| = 0$ y $|H_2| = 0$, y $|H_3| = 18 \neq 0$, la matriz es **indefinida** [38]. Por lo tanto, $(0, 1, 0)$ es un **punto de silla** [38].

2. Evaluar en el punto crítico $(1/2, 1, 1/4)$**:**

$$\mathbf{H}(1/2, 1, 1/4) = \begin{pmatrix} -6(1/2) & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Menores principales dominantes: $|H_1| = -3$ [38]. $|H_2| = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = (-3)(-2) - 0 \cdot 0 = 6$ [38]. $|H_3| = \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} - 0 \cdot (\dots) + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -3(12) + 3(6) = -36 + 18 = -18$ [38]. Los signos de los menores son: $|H_1| = -3 < 0$, $|H_2| = 6 > 0$, $|H_3| = -18 < 0$. Alternan de signo comenzando por negativo. Por lo tanto, la matriz Hessiana es **definida negativa**. El punto $(1/2, 1, 1/4)$ es un **máximo local**.

2.3. Teorema de la Envolvente (Envelope Theorem)

El **Teorema de la Envolvente** es una herramienta esencial para el análisis estático comparativo en economía [39]. Explica cómo el valor óptimo de una función objetivo cambia cuando un parámetro subyacente varía [40-43].

2.3.1. Concepto y Utilidad

Cuando un problema de optimización incluye un parámetro α, las variables óptimas x^* y y^* (en el caso de dos variables) se convierten en funciones de α, es decir, $x^*(\alpha)$ e $y^*(\alpha)$. Al sustituir estos valores óptimos en la función objetivo, se obtiene la **función objetivo indirecta** o **función de valor máximo**, $f^*(\alpha) = f(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha)$ [40]. El teorema de la envolvente establece que el efecto indirecto de un cambio en α (a través de los cambios en x^* e y^*) sobre el valor óptimo de la función es nulo. Solo importa el efecto directo del parámetro sobre la función objetivo.

2.3.2. Formulación (Optimización Libre)

Para un problema de maximización $f(x, y, \alpha)$:

$$\frac{df^*(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial f(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha} \tag{11}$$

Demostración: El diferencial total de f^* con respecto a α es:

$$\frac{df^*}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \tag{12}$$

Sin embargo, por las condiciones de primer orden ($\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en el óptimo) [44], los dos primeros términos se anulan, lo que reduce la expresión a la ecuación 11.

2.3.3. Ejemplo de Aplicación

Consideremos una firma que maximiza su beneficio $\pi = Pf(K, L) - wL - rK$, donde P es el precio del producto, w el salario, y r la tasa de interés. Las CNPO son:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = Pf_L(K, L) - w = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = Pf_K(K, L) - r = 0$$

Estas definen $L^*(w, r, P)$ y $K^*(w, r, P)$ [45]. La función de beneficio indirecta es $\pi^*(w, r, P) = Pf(K^*, L^*) - wL^* - rK^*$ [46]. Según el teorema de la envolvente, para ver cómo cambian los beneficios ante un cambio infinitesimal en los salarios w:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = \frac{\partial L}{\partial w} = -L^* \tag{13}$$

Esto significa que el cambio en el beneficio máximo con respecto al salario es igual a la cantidad óptima de trabajo utilizada, con signo negativo [46].

2.4. Problema de Consolidación: Optimización Libre de Costos

Problema: Una empresa se dedica a la producción de un bien Q utilizando dos insumos, X_1 y X_2. La función de costos totales de la empresa es $C(X_1, X_2) = X_1^3 - 6X_1^2 + 9X_1 + X_2^2 - 4X_2 + 20$. Determine los niveles de insumos X_1 y X_2 que minimizan el costo de producción para la empresa. Verifique que el punto encontrado es un mínimo local y explique el significado económico de sus resultados.

Solución Escalona:

a) **Paso 1: Planteamiento y CNPO**

- **Función Objetivo:** Minimizar $C(X_1, X_2) = X_1^3 - 6X_1^2 + 9X_1 + X_2^2 - 4X_2 + 20$ [47].
- **Cálculo de CNPO:** Se calculan las primeras derivadas parciales y se igualan a cero para encontrar los puntos críticos [47]:

$$\frac{\partial C}{\partial X_1} = 3X_1^2 - 12X_1 + 9 = 0 \quad \text{(Ecuación 1)}$$
$$\frac{\partial C}{\partial X_2} = 2X_2 - 4 = 0 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

- **Resolución del sistema:** De la Ecuación 2: $2X_2 = 4 \implies \mathbf{X_2^* = 2}$ [47]. De la Ecuación 1: $3(X_1^2 - 4X_1 + 3) = 0 \implies X_1^2 - 4X_1 + 3 = 0$ [47]. Factorizando la ecuación cuadrática: $(X_1 - 1)(X_1 - 3) = 0$ [48]. Esto arroja dos posibles valores para X_1: $\mathbf{X_1^* = 1}$ y $\mathbf{X_1^* = 3}$ [48].
- **Puntos críticos:** Se obtienen dos puntos críticos candidatos a extremo local: $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ y $(\mathbf{3}, \mathbf{2})$.

b) **Paso 2: CSSO (Matriz Hessiana)**

- **Cálculo de segundas derivadas:** Se calculan las segundas derivadas parciales para construir la matriz Hessiana [48]:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial X_1^2} = 6X_1 - 12$$
$$\frac{\partial^2 C}{\partial X_2^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 C}{\partial X_1 \partial X_2} = 0 \quad \text{(derivada cruzada)}$$

- **Construcción de la Hessiana:** La matriz Hessiana es [49]:

$$\mathbf{H}(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 6X_1 - 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) **Paso 3: Evaluación de la Hessiana en cada punto crítico y clasificación**

- **Punto crítico 1:** $(1, 2)$ [49]

$$\mathbf{H}(1,2) = \begin{pmatrix} 6(1) - 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Menores principales directores: $H_1 = -6 < 0$ y $H_2 = (-6)(2) - (0)(0) = -12 < 0$ [49]. **Clasificación:** Dado que $H_2 < 0$, la matriz es **indefinida**. Por lo tanto, el punto $(1, 2)$ es un **punto de silla** [49]. No es un mínimo.

- **Punto crítico 2:** $(3, 2)$ [50]

$$\mathbf{H}(3,2) = \begin{pmatrix} 6(3) - 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Menores principales directores: $H_1 = 6 > 0$ y $H_2 = (6)(2) - (0)(0) = 12 > 0$ [50]. **Clasificación:** Dado que $H_1 > 0$ y $H_2 > 0$, la matriz es **definida positiva**. Por lo tanto, el punto $(3, 2)$ es un **mínimo local** [50].

d) **Paso 4: Interpretación económica**

- El análisis matemático indica que la empresa debe utilizar **3** **unidades del insumo X_1** y **2** **unidades del insumo X_2 para minimizar sus costos de producción en ese punto local [50].
- El **costo mínimo local** se obtiene sustituyendo estos valores en la función de costo: $C(3, 2) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + (2)^2 - 4(2) + 20 = 27 - 54 + 27 + 4 - 8 + 20 = \mathbf{16}$ [51].
- El **punto de silla** en $(1, 2)$ significa que, aunque las primeras derivadas parciales sean cero, no es una combinación óptima de insumos. En esa combinación, el costo puede subir o bajar si los insumos se varían en ciertas direcciones, lo que no representa una estabilidad de costo mínimo [51]. La derivada cruzada nula ($C_{X_1X_2} = 0$) indica que las decisiones sobre X_1 y X_2 son independientes en términos de sus efectos marginales de segundo orden.
- La función de costo es un ejemplo de una función no convexa globalmente (por el término cúbico en X_1), lo que explica la existencia de múltiples puntos críticos y por qué solo uno es un mínimo local. Sin un análisis adicional del comportamiento de la función en todo su dominio (por ejemplo, si X_1 puede tomar valores muy grandes, X_1^3 crecerá indefinidamente), no se puede asegurar que sea un mínimo global [51].

2.5. Conclusiones Parciales: Optimización Libre

La optimización libre establece los fundamentos para encontrar los extremos de una función sin restricciones explícitas. Se basa en un proceso de dos etapas: primero, la identificación de puntos críticos mediante las Condiciones Necesarias de Primer Orden (CNPO), que requieren que el gradiente de la función sea nulo. Segundo, la clasificación de estos puntos críticos (como máximos,

mínimos o puntos de silla) mediante las Condiciones Suficientes de Segundo Orden (CSSO), las cuales analizan el signo de la matriz Hessiana. Aunque poderosa para determinar óptimos locales, la optimización libre no garantiza la globalidad del óptimo por sí misma. Sin embargo, conceptos como la concavidad y convexidad de la función, que se detallarán posteriormente, son esenciales para extender la validez de un óptimo local a uno global. Finalmente, el Teorema de la Envolvente complementa este marco al permitir analizar cómo el valor óptimo de la función cambia ante variaciones en parámetros externos, sin necesidad de recalcular todo el problema.

3. Optimización con Restricciones de Igualdad

La optimización con restricciones de igualdad aborda el desafío de encontrar los valores máximos o mínimos de una función objetivo cuando las variables de elección deben satisfacer una o más ecuaciones específicas. Este tipo de problema es fundamental en economía, donde los agentes toman decisiones bajo limitaciones rígidas, como un presupuesto fijo o una cuota de producción exacta. El método principal para resolverlo es el de los Multiplicadores de Lagrange, que transforma el problema restringido en uno de optimización libre de una función auxiliar, conocida como la Lagrangiana. Este enfoque no solo simplifica la resolución, sino que también introduce los multiplicadores de Lagrange, cuyo valor óptimo tiene una profunda interpretación económica como el "precio sombra"de la restricción, revelando la sensibilidad del valor óptimo a cambios marginales en las limitaciones impuestas.

3.1. El Método de los Multiplicadores de Lagrange

3.1.1. Formulación de la Función Lagrangiana

El **Método de los Multiplicadores de Lagrange** permite convertir un problema de optimización con restricciones de igualdad en un problema de optimización libre [52-54]. Para una función $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ que se desea optimizar (maximizar o minimizar) sujeta a m restricciones de igualdad $g_j(\mathbf{x}) = c_j$ (para $j = 1, \ldots, m$), se construye la **Función Lagrangiana ($\mathbf{L}$)** [54, 55, 55, 56]:

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [c_j - g_j(x_1, \ldots, x_n)] \tag{14}$$

Donde λ_j son los **multiplicadores de Lagrange**, variables auxiliares asociadas a cada restricción [54-56]. La condición $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0$ asegura que la restricción original se satisfaga [54, 57].

3.1.2. Condiciones Necesarias de Primer Orden (CNPO)

Las CNPO para un extremo local de la Lagrangiana (que corresponden a un extremo restringido del problema original) se obtienen igualando a cero las derivadas parciales de $\mathcal{L}$ con respecto a cada variable de elección x_i y cada multiplicador de Lagrange λ_j [54, 55, 58]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = c_j - g_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, m$$

La resolución de este sistema de ecuaciones proporciona los puntos críticos o estacionarios, que son candidatos a óptimos restringidos [55].

3.1.3. Condiciones Suficientes de Segundo Orden (CSSO) con el Hessiano Orlado

Para clasificar los puntos críticos en problemas de optimización restringida, se utiliza el **Hessiano Orlado ($\bar{\mathbf{H}}$)** de la función Lagrangiana [59-61]. Esta matriz incorpora no solo las segun-

das derivadas de la Lagrangiana con respecto a las variables de elección, sino también las primeras derivadas de las restricciones [59]. La forma general del Hessiano Orlado es:

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{B}_{m\times n} \\ \mathbf{B}^T_{n\times m} & \mathbf{H}_{n\times n} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Donde:

- $\mathbf{0}_{m\times m}$ es una matriz nula de tamaño $m \times m$ [14].
- $\mathbf{B}_{m\times n}$ es la matriz Jacobiana de las restricciones, $\mathbf{B} = \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)$ [14].
- $\mathbf{B}^T_{n\times m}$ es su transpuesta [14].
- $\mathbf{H}_{n\times n}$ es la matriz Hessiana de la Lagrangiana con respecto únicamente a las variables de elección x_i, es decir, $H_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}$ [59].

Los criterios de signo para el Hessiano Orlado son los siguientes:

- **Mínimo Local Restringido:** Si los últimos $(n - m)$ menores principales dominantes de $\bar{\mathbf{H}}$ (empezando por $|\bar{\mathbf{H}}_{m+1}|$) tienen el mismo signo que $(-1)^m$ [14, 62]. Es decir, $(-1)^m|\bar{\mathbf{H}}_i| > 0$ para $i = m + 1, \ldots, n$ [14].
- **Máximo Local Restringido:** Si los últimos $(n - m)$ menores principales dominantes de $\bar{\mathbf{H}}$ (empezando por $|\bar{\mathbf{H}}_{m+1}|$) alternan de signo, comenzando con el signo opuesto a $(-1)^m$ [14, 62]. Es decir, $(-1)^i|\bar{\mathbf{H}}_i| > 0$ para $i = m + 1, \ldots, n$ [14].

Ejemplo: Para el Ejemplo 1 en la fuente [63] (no se proporciona la función f y g pero se da el Hessiano Orlado). Los valores son: $\mathrm{H}(x_1 = 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2x & -2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2x & 0 & -2\lambda_1 & z & y \\ -2y & -1 & z & -2\lambda_1 & x \\ 0 & 0 & y & x & 0 \end{pmatrix}$. Se evalúa en el punto crítico $x_1 = (1, 0, 0)$ [64], $|H| = 0$. Para $x_2 \approx (0{,}4343, 0{,}9008, 0{,}5657)$ [64], $|H_3| = |H| \approx -7{,}35 < 0$ (considerando $n = 3, m = 2$). Los menores relevantes para la clasificación serían $|\bar{H}_{m+1}| = |\bar{H}_3|$ y $|\bar{H}_{m+2}| = |\bar{H}_4|$, etc. El ejemplo dado en [64] es un poco confuso en la indexación de los menores dominantes, ya que el Hessiano Orlado se construye para n variables y m restricciones. Para el ejemplo 1 de la fuente (Ejemplo 1 de optimización libre con $m = 0$): Hessiano en $(1/2, 1, 1/4)$ era definida negativa [38].

3.2. Interpretación Económica de los Multiplicadores de Lagrange

Los **multiplicadores de Lagrange (λ_j)** no son solo variables auxiliares; tienen una profunda **interpretación económica** como los **precios sombra** de las restricciones.

3.2.1. Concepto de Precio Sombra

Un multiplicador de Lagrange λ_j^* asociado a una restricción $g_j(\mathbf{x}) = c_j$ mide el **cambio marginal en el valor óptimo de la función objetivo** (f^*) si el lado derecho de la restricción (c_j) se relaja o se endurece infinitesimalmente (es decir, si c_j cambia en una unidad marginal).

$$\frac{df^*}{dc_j} = \lambda_j^* \tag{16}$$

Demostración: Para el caso de dos variables y una restricción [68], la función de Lagrange evaluada en el óptimo es $\mathcal{L}^* = f(x^*(c), y^*(c)) + \lambda^*(c)[c - g(x^*(c), y^*(c))]$. Derivando $\mathcal{L}^*$ con respecto a c y aplicando las CNPO, se obtiene $\frac{d\mathcal{L}^*}{dc} = \lambda^*$. Esto significa que el cambio en el valor óptimo de la función es directamente el valor del multiplicador de Lagrange [63].

3.2.2. Utilidad y Significado Económico

- Los precios sombra son útiles para la toma de decisiones al valorar recursos escasos que no tienen un precio de mercado explícito.
- Si $\lambda_j^* > 0$, la restricción j es **activa** o **vinculante**. Esto significa que la restricción está limitando el valor óptimo de la función objetivo, y relajarla (aumentar c_j) mejoraría el resultado. El recurso o limitación está siendo utilizado completamente.
- Si $\lambda_j^* = 0$, la restricción j es **inactiva** o **no vinculante** [65, 70]. Esto significa que hay holgura en el recurso o la limitación no está afectando el óptimo. Relajarla o endurecerla marginalmente no cambiaría el valor óptimo de la función objetivo.

3.3. Problema de Consolidación: Maximización de Utilidad del Consumidor

Problema: Un consumidor tiene una función de utilidad $U(x, y) = \ln x + \ln y$ y un presupuesto M. Los precios de los bienes son P_x y P_y. El consumidor desea maximizar su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria $P_x x + P_y y = M$. Encuentre los niveles óptimos de consumo x^* e y^*, el valor del multiplicador de Lagrange λ^*, y explique su significado económico. Verifique las CSSO y justifique la globalidad del óptimo.

Solución Escalona:

a) **Paso 1: Formulación del problema**

- **Función Objetivo:** Maximizar $U(x, y) = \ln x + \ln y$. (Asumimos $x, y > 0$ ya que ln no está definido para valores no positivos) [71].
- **Restricción:** $P_x x + P_y y = M$.
- **Función Lagrangiana:** Se construye la Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \ln x + \ln y - \lambda(P_x x + P_y y - M)$$

(Se utiliza un signo negativo para el término de la restricción en la Lagrangiana, de modo que el multiplicador λ se interprete como utilidad marginal positiva para un aumento en M).

b) **Paso 2: Condiciones Necesarias de Primer Orden (CNPO)**

- Se calculan las derivadas parciales de $\mathcal{L}$ con respecto a x, y, y λ, y se igualan a cero [72]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} - \lambda P_x = 0 \implies x = \frac{1}{\lambda P_x} \quad \text{(Ecuación 1)} \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{y} - \lambda P_y = 0 \implies y = \frac{1}{\lambda P_y} \quad \text{(Ecuación 2)} \tag{18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(P_x x + P_y y - M) = 0 \implies P_x x + P_y y = M \quad \text{(Ecuación 3)} \tag{19}$$

c) **Paso 3: Resolución del sistema**

- De las Ecuaciones 1 y 2, se puede establecer una relación entre x e y eliminando λ: $\lambda = \frac{1}{xP_x} = \frac{1}{yP_y} \implies yP_y = xP_x \implies y = \frac{P_x}{P_y}x$.
- Sustituir esta expresión para y en la Ecuación 3 (restricción presupuestaria) [73]: $P_x x + P_y\left(\frac{P_x}{P_y}x\right) = M$ $P_x x + P_x x = M$ $2P_x x = M \implies \mathbf{x^* = \frac{M}{2P_x}}$.
- Sustituir x^* de nuevo en la expresión para y: $y^* = \frac{P_x}{P_y}\left(\frac{M}{2P_x}\right) \implies \mathbf{y^* = \frac{M}{2P_y}}$.
- Finalmente, encontrar λ^* sustituyendo x^* en la Ecuación 1 [73]: $\frac{1}{M/(2P_x)} = \lambda^* P_x \implies \frac{2P_x}{M} = \lambda^* P_x \implies \lambda^* = \mathbf{\frac{2}{M}}$.

d) **Paso 4: Verificación de las CSSO y propiedades de concavidad/globalidad**

- La función de utilidad $U(x, y) = \ln x + \ln y$ es **cóncava** [74]. Para funciones cóncavas y restricciones lineales (como la presupuestaria), cualquier punto que satisfaga las CNPO es un máximo global [74].

- Para verificar la concavidad, se analiza la Hessiana de $U(x, y)$: $U_x = 1/x$, $U_y = 1/y$. $U_{xx} = -1/x^2$. $U_{yy} = -1/y^2$. $U_{xy} = U_{yx} = 0$. La matriz Hessiana de $U(x, y)$ es:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1/x^2 & 0 \\ 0 & -1/y^2 \end{pmatrix}$$

  Menores principales directores: $H_1 = -1/x^2 < 0$ y $H_2 = (-1/x^2)(-1/y^2) - 0^2 = 1/(x^2y^2) > 0$ [74]. Los signos $(< 0, > 0)$ alternan comenzando por negativo, lo que confirma que la Hessiana es **definida negativa**. Por lo tanto, $U(x, y)$ es una función **estrictamente cóncava** [74].
- Dado que la función objetivo es estrictamente cóncava y el conjunto factible (dado por la restricción presupuestaria y $x, y > 0$) es convexo, el punto encontrado es un **máximo global único** .

e) **Paso 5: Interpretación Económica de los resultados**

- Las soluciones $\mathbf{x}^* = \mathbf{M}/(\mathbf{2P_x})$ y $\mathbf{y}^* = \mathbf{M}/(\mathbf{2P_y})$ son las **funciones de demanda marshallianas** para los bienes x e y. Indican las cantidades óptimas de cada bien que el consumidor demandará dados su ingreso y los precios.
- El multiplicador de Lagrange $\lambda^* = \mathbf{2}/\mathbf{M}$ se interpreta como el **precio sombra del ingreso**, o la **utilidad marginal del ingreso** [76, 77]. Mide cuánto aumentaría la utilidad máxima del consumidor si su ingreso disponible M aumentara en una unidad monetaria.
- **Análisis de λ^*:** Si el ingreso M aumenta, λ^* disminuye [78, 79]. Esto es consistente con la ley de la utilidad marginal decreciente: a medida que el consumidor tiene más ingreso, una unidad adicional de ingreso le reporta una utilidad marginal menor.

3.4. Conclusiones Parciales: Optimización con Restricciones de Igualdad

La optimización con restricciones de igualdad, abordada fundamentalmente por el método de los Multiplicadores de Lagrange, es una técnica esencial para resolver problemas económicos donde los agentes enfrentan límites precisos y no negociables. El proceso implica la construcción de una función Lagrangiana, seguida por la aplicación de las condiciones de primer orden (CNPO) para identificar los puntos críticos, y las condiciones de segundo orden (CSSO) utilizando el Hessiano Orlado para clasificar estos puntos como máximos o mínimos locales. Más allá de la mecánica de cálculo, la principal riqueza de este método reside en la interpretación económica del multiplicador de Lagrange como el "precio sombra"de la restricción, cuantificando el valor marginal de relajar una limitación. Este análisis es un puente crucial entre la teoría matemática y la toma de decisiones económicas, permitiendo comprender el costo de oportunidad de los recursos escasos.

4. Optimización con Restricciones de Desigualdad (Condiciones KKT)

La optimización con restricciones de desigualdad, central en la economía para la asignación eficiente de recursos escasos, permite modelar situaciones más realistas donde las limitaciones no son estrictamente vinculantes, como la no negatividad de las variables o el no exceder una capacidad máxima. Las **Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** son el conjunto de criterios que generalizan el método de los Multiplicadores de Lagrange, proporcionando las condiciones necesarias (y bajo ciertas hipótesis, suficientes) para encontrar óptimos en problemas de programación no lineal con restricciones de desigualdad. Las KKT no solo identifican los puntos óptimos, sino que también revelan qué restricciones son realmente activas y el "valor sombra"de relajar cada limitación, ofreciendo una visión profunda de las fuerzas que determinan el equilibrio económico.

4.1. Las Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

4.1.1. Formulación General

Las **Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** son un conjunto de condiciones necesarias de primer orden para que un punto sea una solución óptima (máximo o mínimo local) en problemas de programación no lineal con restricciones de desigualdad y no negatividad . Son una generalización directa del método de los multiplicadores de Lagrange.

Consideremos un problema de **maximización** de $f(\mathbf{x})$ sujeto a m restricciones de desigualdad $g_j(\mathbf{x}) \leq r_j$ (o $r_j - g_j(\mathbf{x}) \geq 0$) y n restricciones de no negatividad para las variables $x_i \geq 0$. La Lagrangiana asociada, sin usar explícitamente variables de holgura, es [84-86]:

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [r_j - g_j(x_1, \ldots, x_n)] \tag{20}$$

4.1.2. Condiciones de Primer Orden KKT

Las condiciones de primer orden KKT son un sistema de ecuaciones y desigualdades que deben satisfacerse en el óptimo [85, 87-89]:

1. Condiciones sobre las variables de elección x_i:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n \tag{21}$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n \tag{22}$$

$$x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n \quad \text{(Condición de holgura complementaria para } x_i\text{)} \tag{23}$$

Interpretación de la holgura complementaria para x_i: [90, 91]

- Si $x_i^* > 0$ (la variable se produce/consume en cantidad positiva), entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ (su contribución marginal neta es cero).
- Si $x_i^* = 0$ (la variable no se produce/consume), entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \leq 0$ (su contribución marginal neta es no positiva).

2. Condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange λ_j (y las restricciones $g_j(\mathbf{x})$):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = r_j - g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, m \quad \text{(Restricción original)} \tag{24}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, m \tag{25}$$

$$\lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, m \quad \text{(Condición de holgura complementaria para } \lambda_j\text{)} \tag{26}$$

Interpretación de la holgura complementaria para λ_j: [69, 93]

- Si $\lambda_j^* > 0$ (el precio sombra es positivo), entonces $r_j - g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \implies g_j(\mathbf{x}^*) = r_j$ (la restricción está **activa** o **vinculante**).
- Si $\lambda_j^* = 0$ (el precio sombra es cero), entonces $r_j - g_j(\mathbf{x}^*) > 0 \implies g_j(\mathbf{x}^*) < r_j$ (la restricción está **inactiva** o **no vinculante**, hay holgura).

Las KKT buscan puntos de silla de la Lagrangiana, que corresponden a los óptimos de la función objetivo original.

4.2. Calificación de Restricciones (Constraint Qualification - CQ)

La **Calificación de Restricciones (CQ)** es una condición técnica fundamental para que las KKT sean **necesarias** para un óptimo local [94-97]. Su propósito es asegurar que la frontera del conjunto factible no presente ïrregularidades"(como cúspides o redundancias lineales) en el punto óptimo que podrían invalidar la aplicación e interpretación de los multiplicadores de Lagrange.

4.2.1. Condiciones Suficientes para que las Restricciones Caliquen

[98, 99]

- La matriz Jacobiana de las restricciones activas, evaluada en el óptimo, tiene rango máximo [98].
- **Condición de Slater:** Para problemas convexos, si existe un punto estrictamente factible (es decir, que satisfaga todas las restricciones de desigualdad de forma estricta).
- Las funciones de restricción son **lineales**. En este caso, la CQ se satisface automáticamente.

4.2.2. Contraejemplo de Falla de CQ

Consideremos maximizar $f(x_1) = x_1$ sujeto a $x_1^2 + x_2^2 \leq 0$ y $x_1, x_2 \geq 0$ [102, 103]. El único punto factible es $(0, 0)$, donde $f(0, 0) = 0$, que es el máximo global [102, 103]. Sin embargo, la restricción $x_1^2 + x_2^2 \leq 0$ se cumple solo en $(0, 0)$, por lo que no existe un punto estrictamente factible, y la Condición de Slater no se cumple [103, 104]. En este caso, las KKT no se cumplen en el óptimo, ya que $\partial\mathcal{L}/\partial x_1 = 1 - 3\lambda(1 - x_1)^2 = 1 > 0$ en $(1, 0)$ [102]. Esto ilustra cómo la falla de la CQ puede hacer que las KKT no sean necesarias para el óptimo [102, 105].

4.3. Concavidad/Convexidad y Suficiencia Global en KKT

Las KKT son condiciones necesarias, pero para que sean **suficientes** para un óptimo global, se necesitan propiedades adicionales de concavidad/convexidad de la función objetivo y las restricciones.

4.3.1. Teorema de Arrow-Enthoven

Si $\mathbf{x}^*$ satisface las condiciones de KKT para un máximo del problema de optimización con restricciones de desigualdad, y si:

- $f(\mathbf{x})$ es (estrictamente) **cuasicóncava**.
- Las funciones $g_j(\mathbf{x})$ son **cuasiconvexas** para todas las restricciones de desigualdad activas.
- Se satisface al menos una de las siguientes condiciones:
  a) $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$
  b) $f(\mathbf{x})$ es (estrictamente) **cóncava**.

Entonces $\mathbf{x}^*$ es un **máximo global (único)** [92, 99, 108-110]. Un teorema análogo aplica para mínimos con funciones cuasiconvexas y restricciones cuasicóncavas.

4.3.2. Programación Cóncava

En el caso de **programación cóncava** (un tipo de programación no lineal), donde la función objetivo es cóncava (para maximización) y el conjunto factible es convexo (definido por restricciones convexas), las KKT son **suficientes para un máximo global**.

4.4. Problema de Consolidación: Maximización de Beneficios con Restricción de Capacidad

Problema: Maximice $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ sujeto a $x_1 + x_2 \leq 4$ y $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución Escalona:

a) **Paso 1: Formular la Lagrangiana**
- **Función Objetivo:** $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

- **Restricciones:** $g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.
- **Lagrangiana:**
$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(4 - x_1 - x_2)$$
Se incorpora la restricción de desigualdad para aplicar las condiciones de primer orden KKT.

b) **Paso 2: Derivar las Condiciones KKT**

- **Condiciones sobre x_1:**
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_2 - \lambda \leq 0 \tag{27}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{28}$$
$$x_1(x_2 - \lambda) = 0 \tag{29}$$
- **Condiciones sobre x_2:**
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1 - \lambda \leq 0 \tag{30}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{31}$$
$$x_2(x_1 - \lambda) = 0 \tag{32}$$
- **Condiciones sobre λ:**
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 4 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad (\text{o } x_1 + x_2 \leq 4) \tag{33}$$
$$\lambda \geq 0 \tag{34}$$
$$\lambda(4 - x_1 - x_2) = 0 \tag{35}$$

Estas condiciones son el conjunto de requisitos de primer orden para el óptimo, incluyendo las holguras complementarias que vinculan las condiciones marginales con la actividad de las variables y restricciones [109, 112, 113].

c) **Paso 3: Resolver el Sistema (análisis de casos de holgura)**

- **Caso 1: $\lambda = 0$ (Restricción inactiva)** [112, 113] Si $\lambda = 0$, de (27) y (30), obtenemos $x_2 \leq 0$ y $x_1 \leq 0$. Dado que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ por las restricciones de no negatividad, esto implica $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. Verificamos la consistencia con la restricción original: $0 + 0 \leq 4$, lo cual es verdadero. Valor de la función objetivo en este punto: $f(0, 0) = 0$. Este caso explora la posibilidad de que la restricción de capacidad no sea vinculante, encontrando el óptimo en el interior de la región factible [114].
- **Caso 2: $\lambda > 0$ (Restricción activa)** [106, 114] Si $\lambda > 0$, de (35), se debe cumplir que $4 - x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 + x_2 = 4$. Ahora, consideremos las sub-casos para x_1, x_2:
  - **Sub-caso 2.1: $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$** De (29) y (32), obtenemos: $x_2 - \lambda = 0 \implies x_2 = \lambda$ $x_1 - \lambda = 0 \implies x_1 = \lambda$ Sustituyendo $x_1 = \lambda$ y $x_2 = \lambda$ en la restricción activa $x_1 + x_2 = 4$: $\lambda + \lambda = 4 \implies 2\lambda = 4 \implies \lambda = 2$. Así, $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$. Verificamos la consistencia: $x_1 = 2 > 0, x_2 = 2 > 0, \lambda = 2 > 0$. Todas las condiciones son consistentes [106, 115]. Valor de la función objetivo en este punto: $f(2, 2) = 2 \cdot 2 = 4$.
  - **Sub-caso 2.2: $x_1 = 0$ (y por tanto $x_2 = 4$ de la restricción activa)** De (29), se cumple porque $x_1 = 0$. De (32), como $x_2 = 4 > 0$, se debe cumplir $x_1 - \lambda = 0 \implies 0 - \lambda = 0 \implies \lambda = 0$. Pero este es el Caso 1, ya explorado. Es una contradicción con $\lambda > 0$. Así que este sub-caso no produce una solución válida.
  - **Sub-caso 2.3: $x_2 = 0$ (y por tanto $x_1 = 4$ de la restricción activa)** De (32), se cumple porque $x_2 = 0$. De (29), como $x_1 = 4 > 0$, se debe cumplir $x_2 - \lambda = 0 \implies 0 - \lambda = 0 \implies \lambda = 0$. Contradicción con $\lambda > 0$. No produce una solución válida.

  Este caso explora la posibilidad de que la restricción de capacidad sea vinculante, encontrando el óptimo en la frontera de la región factible [115].

d) **Paso 4: Comparar Candidatos**

- Los puntos candidatos a óptimo son $(0, 0)$ con $f = 0$ y $(2, 2)$ con $f = 4$ [116, 117].

- El valor máximo de la función objetivo es 4, alcanzado en $(\mathbf{x_1^*}, \mathbf{x_2^*}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2})$ [116, 117].

e) **Paso 5: Verificar Suficiencia (Globalidad)**

- La función objetivo $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ no es cóncava globalmente (su matriz Hessiana es indefinida, como se vio en el problema de consolidación de la sección Çoncavidad y Convexidad"). Sin embargo, en la región factible definida por $x_1 + x_2 \leq 4, x_1, x_2 \geq 0$, la función es **cuasicóncava** [116, 117].
- Las restricciones $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ son todas **lineales**. Esto implica que el conjunto factible es **convexo** y que la **Condición de Calificación de Restricciones (CQ) se satisface automáticamente** [118].
- Dado que el problema es de maximización con un conjunto factible convexo y una función objetivo cuasicóncava, y el punto encontrado satisface las KKT, el punto $(2, 2)$ es el **máximo global** del problema [116, 117]. (Se aplica el teorema de Arrow-Enthoven o el hecho de que en programación lineal/cuadrática con restricciones lineales, si hay un óptimo, este será global si la función objetivo es cóncava/cuasicóncava).

4.5. Conclusiones Parciales: Optimización con Restricciones de Desigualdad (Condiciones KKT)

Las Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) representan una generalización fundamental del método de Lagrange, permitiendo la resolución de problemas de optimización con restricciones de desigualdad y no negatividad, que son omnipresentes en la economía. Estas condiciones proporcionan un sistema de ecuaciones y desigualdades que, junto con las cruciales condiciones de holgura complementaria para variables de elección y multiplicadores, identifican los puntos críticos candidatos a óptimos. La validez de las KKT como condiciones necesarias se apoya en la Calificación de Restricciones, mientras que su suficiencia para garantizar un óptimo global depende de propiedades de concavidad o cuasiconcavidad de la función objetivo y convexidad de las restricciones. La interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange como "precios sombraz el análisis de la actividad de las restricciones y variables son insights fundamentales que las KKT proporcionan, revelando la lógica subyacente y el valor marginal de los recursos escasos.

5. Concavidad y Convexidad de Funciones: Fundamentos y Aplicaciones

La concavidad y convexidad son conceptos fundamentales en el análisis matemático, especialmente críticos en el campo de la optimización. Estas propiedades describen la çurvatura"de una función y son esenciales para determinar la naturaleza de un punto crítico, distinguiendo si es un máximo o un mínimo. Más allá de la clasificación local, son decisivas para asegurar que un extremo relativo sea también un extremo absoluto o global en todo el dominio de la función. En la economía, estas propiedades dotan de un rigor matemático indispensable al análisis, permitiendo formular y resolver problemas complejos con precisión, desde la maximización de la utilidad hasta la minimización de costos, asegurando que las soluciones encontradas son globalmente óptimas.

5.1. Definiciones Formales

5.1.1. Cóncava y Convexa

Para una función $f : D \to \mathbb{R}$ donde D es un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ [80, 80]:

- f es **cóncava** en D si para todo $\lambda \in [1]$ y para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$:

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) \tag{36}$$

  Geométricamente, el segmento de línea que conecta dos puntos en la gráfica de la función se encuentra **por debajo o sobre** la gráfica [119, 120].

- f es **convexa** en D si para todo $\lambda \in [1]$ y para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$:

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}) \tag{37}$$

  Geométricamente, el segmento de línea que conecta dos puntos en la gráfica de la función se encuentra **por encima o sobre** la gráfica [119, 120].

Si la desigualdad se cumple estrictamente ($>$ o $<$) para $\lambda \in (0,1)$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, la función es **estrictamente cóncava** o **estrictamente convexa**, respectivamente [80].

5.1.2. Cuasicóncava y Cuasiconvexa

Las propiedades de cuasiconcavidad y cuasiconvexidad son más débiles que la concavidad y convexidad [43, 121].

- f es **cuasicóncava** si su **conjunto de niveles superiores** $S_{\geq} = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \geq k\}$ es un conjunto convexo para todo $k \in \mathbb{R}$ [43, 122, 123]. Para dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ y $\lambda \in (0,1)$, si $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$, entonces $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{y})$ [124].
- f es **cuasiconvexa** si su **conjunto de niveles inferiores** $S_{\leq} = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \leq k\}$ es un conjunto convexo para todo $k \in \mathbb{R}$ [43, 122, 123]. Para dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ y $\lambda \in (0,1)$, if $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$, then $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$ [124].

Una función es **estrictamente cuasicóncava** si $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) \implies f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) > f(\mathbf{y})$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ [121]. Similarmente para estrictamente cuasiconvexa [125]. **Idea Clave:** Toda función cóncava (convexa) es cuasicóncava (cuasiconvexa), pero lo recíproco no siempre es cierto [43, 121].

5.2. Contexto y Prerrequisitos en Economía

5.2.1. Aplicaciones Prácticas en Economía

Estas propiedades son cruciales para asegurar que un extremo local sea también un **extremo absoluto (global)**, lo cual es vital en la práctica económica para buscar el mejor resultado general [79].

- **Maximización de Utilidad:** Las funciones de utilidad se asumen **cóncavas** (o cuasicóncavas) para reflejar la utilidad marginal decreciente y la aversión al riesgo [126, 127].
- **Minimización de Costos:** Las funciones de costos suelen ser **convexas** para indicar costos marginales crecientes [126, 127].
- **Funciones de Producción:** Se analizan en términos de concavidad o cuasiconcavidad para entender los rendimientos a escala o la sustituibilidad entre insumos [128, 129].

5.2.2. Prerrequisitos Esenciales

Para comprender y aplicar estos conceptos, se requieren conocimientos de [128, 130]:

- **Cálculo diferencial avanzado:** Derivadas de segundo orden, derivadas parciales de segundo orden.
- **Álgebra lineal:** Matrices (Hessiana, Hessiano Orlado), determinantes, definitividad de matrices.
- **Teoría de optimización:** CNPO y CSSO para problemas con y sin restricciones.

5.3. Hipótesis y Regularidad

Para que los criterios de concavidad y convexidad basados en derivadas de segundo orden (Hessiana) sean aplicables, la función $f(\mathbf{x})$ debe cumplir con ciertas condiciones de **regularidad** [131].

- Debe ser **continua** en su dominio de interés [132].
- Debe ser **diferenciable al menos dos veces de forma continua** ($\mathbf{C^2}$) en su dominio (o en la vecindad de un punto si se analiza localmente) [28, 132, 133]. Esto asegura que la matriz Hessiana exista y sea simétrica (por el Teorema de Young, $f_{xy} = f_{yx}$) [28, 31, 32].
- Para la optimización libre, el **dominio suele ser abierto** [134].

5.3.1. Contraejemplo de Falla de Regularidad

Consideremos la función $f(x) = |x|$ [132]. Esta función es continua pero **no es diferenciable en $x = 0$** [132]. Si se intentara aplicar el criterio de la segunda derivada, no se encontraría el mínimo en $x = 0$ porque la derivada no existe en ese punto [135, 136]. La falta de diferenciabilidad continua en el punto de interés impide aplicar directamente los criterios basados en la Hessiana [135, 137].

5.4. Criterios de Concavidad y Convexidad basados en Derivadas

5.4.1. Para Funciones de una Variable

Para una función $f(x)$ que es al menos dos veces continuamente diferenciable [138]:

- Si $f''(x) \leq 0$ en un intervalo, $f(x)$ es **cóncava** en ese intervalo. Si $f''(x) < 0$, es **estrictamente cóncava** [138].
- Si $f''(x) \geq 0$ en un intervalo, $f(x)$ es **convexa** en ese intervalo. Si $f''(x) > 0$, es **estrictamente convexa** [138].

5.4.2. Para Funciones de Múltiples Variables (Matriz Hessiana)

Para una función $f(\mathbf{x})$ que es al menos dos veces continuamente diferenciable ($\mathbf{C^2}$) [120, 139, 140]:

- $f(\mathbf{x})$ es **cóncava** si su matriz Hessiana $\mathbf{H}$ es **semidefinida negativa** para todos los $\mathbf{x}$ en su dominio [120, 139, 140]. Si $\mathbf{H}$ es **definida negativa**, es **estrictamente cóncava** [120, 139, 140].
- $f(\mathbf{x})$ es **convexa** si su matriz Hessiana $\mathbf{H}$ es **semidefinida positiva** para todos los $\mathbf{x}$ en su dominio [120, 139, 140]. Si $\mathbf{H}$ es **definida positiva**, es **estrictamente convexa** [120, 139, 140].

Los criterios para determinar la definitividad de la Hessiana son los mismos que para las formas cuadráticas (Criterio de Sylvester o autovalores) [35].

5.4.3. Para Cuasiconcavidad/Cuasiconvexidad (Matriz Bordeada B)

Para una función $f : D \to \mathbb{R}$ de clase $\mathbf{C^2}$, se define la siguiente matriz bordeada $\mathbf{B}$ [125, 141]:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \tag{38}$$

Donde $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ y $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ [125].

- f es **cuasicóncava** en D si $\mathbf{B}$ es **semidefinida negativa** en D [125, 141]. Esto implica que los menores principales de $\mathbf{B}$ deben alternar de signo, empezando por positivo (para un máximo) [141].
- f es **cuasiconvexa** en D si $\mathbf{B}$ es **semidefinida positiva** en D [125, 141].

Si $\mathbf{B}$ es definida negativa (positiva), entonces f es estrictamente cuasicóncava (cuasiconvexa) [142].

5.5. Procedimiento para Verificar Concavidad/Convexidad (Matriz Hessiana)

Para verificar la concavidad o convexidad de $f(\mathbf{x})$ [143]:

a) **Paso 1: Calcular las segundas derivadas parciales:** Calcular $f_{x_i x_j}$ para todas las combinaciones de variables [143]. Estas son las "piezas"que formarán la matriz Hessiana, capturando la curvatura y las interacciones entre variables [143].

b) **Paso 2: Construir la Matriz Hessiana H:** Organizar las segundas derivadas parciales en la matriz simétrica $\mathbf{H}$ [143]. La Hessiana encapsula toda la información de la curvatura en un formato matricial [143].

c) **Paso 3: Calcular los menores principales directores:** Obtener $|H_1|, |H_2|, \ldots, |H_n|$ [144]. Estos determinantes sucesivos proporcionan un test sistemático para determinar la definitividad de la matriz [144].

d) **Paso 4: Aplicar el criterio de signos:**

- **Para concavidad (definida negativa):** Verificar si $|H_1| < 0, |H_2| > 0, |H_3| < 0, \ldots$ (signos alternos, empezando negativo) [144]. Este patrón indica que la función se çurva hacia abajo.[en] todas las direcciones, garantizando un comportamiento de "domo"[144].
- **Para convexidad (definida positiva):** Verificar si $|H_1| > 0, |H_2| > 0, |H_3| > 0, \ldots$ (todos positivos) [145]. Este patrón indica que la función se çurva hacia arriba.[en] todas las direcciones, garantizando un comportamiento de "valle"[145].

5.6. Garantías y Límites

- Estos criterios **garantizan** la identificación de la curvatura global (o local, si se evalúa en un punto) de la función [146].
- Si una función es cóncava (convexa), cualquier máximo (mínimo) local será un máximo (mínimo) global [42, 45, 146].
- **Supuestos:** La función debe ser al menos dos veces diferenciable de forma continua en el dominio de interés [146].
- **Límites:** El cálculo de Hessianas puede ser laborioso. Los criterios de menores principales directores solo aplican a definitividad estricta (positiva/negativa), no para semidefinitividad o indefinida, donde se necesitan otros métodos (ej. autovalores) [146].

Teorema de Suficiencia Global: Si $\mathbf{x}^*$ es un punto estacionario de $f(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{x})$ es (estrictamente) cóncava, entonces $\mathbf{x}^*$ es un máximo global (único) [42, 139]. Un teorema análogo es válido para problemas de mínimo si $f(\cdot)$ es (estrictamente) convexa [147].

5.7. Interpretación Geométrica y Económica

5.7.1. Representación Gráfica

- **Función cóncava:** Se asemeja a una **montaña o una cúpula** [123, 148]. La superficie se curva hacia abajo.
- **Función convexa:** Se asemeja a un **valle o un tazón** [148, 149]. La superficie se curva hacia arriba.

5.7.2. Traducción Económica

- **Función de Utilidad Cóncava:** Implica **utilidad marginal decreciente** [126, 127]. Cada unidad adicional de consumo (o riqueza) proporciona una satisfacción incremental menor. Un consumidor con una función de utilidad cóncava es **reacio al riesgo** [32, 127].
- **Función de Costos Convexa:** Implica **costos marginales crecientes** [126, 127]. Producir cada unidad adicional es cada vez más costoso.
- **Funciones de Producción Cuasicóncavas:** Aseguran que las **isocuantas son convexas al origen** (tasa marginal de sustitución técnica decreciente) [129]. Las curvas de indiferencia en teoría del consumidor son un ejemplo clásico de funciones cuasicóncavas, donde el conjunto de cestas de consumo que dan al menos cierta utilidad es convexo [149].
- **Funciones de Producción Cuasiconvexas:** Las isocuantas en la teoría de la producción son un ejemplo. Las funciones de producción suelen ser cuasiconvexas, asegurando que el conjunto de combinaciones de insumos que producen a lo sumo un cierto nivel de output sea convexo [131].

5.8. Problema de Consolidación: Concavidad de Función de Utilidad

Problema: Un consumidor busca maximizar su utilidad $U(x, y) = xy$ sujeta a la restricción presupuestaria $2x + y = 100$.

1. Encuentre los niveles óptimos de consumo x^* e y^*. 2. Verifique si la función de utilidad $U(x, y)$ es cóncava. 3. Con base en el resultado anterior, ¿puede asegurar que los valores encontrados en (1) corresponden a un máximo global? Justifique.

Solución Escalona:

a) **Paso 1: Optimización (Multiplicadores de Lagrange)**

- **Lagrangiana:** $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - \lambda(2x + y - 100)$ [150].
- **Condiciones de primer orden (CNPO):**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 2\lambda = 0 \implies y = 2\lambda \quad (1)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda = 0 \implies x = \lambda \quad (2)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(2x + y - 100) = 0 \implies 2x + y = 100 \quad (3)$$

- **Resolución del sistema:** Sustituir (1) y (2) en (3): $2(\lambda) + (2\lambda) = 100 \implies 4\lambda = 100 \implies \lambda^* = \mathbf{25}$ [151].
- **Valores óptimos:** $x^* = \lambda^* = \mathbf{25}$ y $y^* = 2\lambda^* = 2(25) = \mathbf{50}$.

b) **Paso 2: Verificación de la Concavidad de $U(x, y) = xy$**

- **Calcular las segundas derivadas parciales:** $U_x = y$, $U_y = x$. $U_{xx} = 0$. $U_{yy} = 0$. $U_{xy} = U_{yx} = 1$.
- **Construir la Matriz Hessiana:**

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Calcular los menores principales directores:** [152] $|H_1| = 0$. $|H_2| = (0)(0) - (1)(1) = -1$.
- **Análisis:** Los signos de los menores $(0, -1)$ no siguen el patrón de definida positiva (todos > 0) ni definida negativa (alternos empezando < 0) [152]. Específicamente, $|H_1| = 0$ y $|H_2| < 0$, lo que indica que la función $U(x, y) = xy$ es **indefinida** [152]. Por lo tanto, **no es cóncava ni convexa** en todo su dominio.

c) **Paso 3: Garantía del Máximo Global**

- **Interpretación:** Aunque $U(x, y) = xy$ no es cóncava, sí es **cuasicóncava**. Las curvas de nivel de $U(x, y) = xy$ (las hipérbolas $xy = k$) son convexas al origen en el primer cuadrante [154]. El conjunto de niveles superiores $S_{\geq} = \{(x, y)|xy \geq k\}$ es convexo para $x, y > 0$ [154].
- **Justificación:** En problemas de maximización de utilidad con restricciones lineales (como la presupuestaria) y un espacio factible convexo (dado por la restricción y la no negatividad $x, y \geq 0$), la **cuasiconcavidad de la función objetivo es suficiente para garantizar que un punto que satisface las condiciones de primer orden es un máximo global** [75, 108, 153].
- Por lo tanto, sí, los valores $\mathbf{x}^* = \mathbf{25}$ e $\mathbf{y}^* = \mathbf{50}$ corresponden a un **máximo global** de la utilidad sujeta a la restricción presupuestaria [75].

5.9. Conclusiones Parciales: Concavidad y Convexidad

La concavidad y convexidad, junto con sus versiones cuasi, son propiedades cruciales en el análisis de funciones para la optimización. Describen la curvatura de una función, permitiendo clasificar los puntos críticos y, fundamentalmente, asegurar que un óptimo local sea también global. Los criterios basados en el signo de la Hessiana (o la matriz B para cuasi) son la herramienta principal para esta clasificación. En economía, estas propiedades son esenciales para modelar comportamientos de agentes bajo supuestos como la utilidad marginal decreciente o los costos marginales crecientes. Comprender estas propiedades, sus hipótesis de regularidad y sus implicaciones es indispensable para aplicar rigor matemático en la búsqueda de soluciones óptimas en un contexto económico, siendo la base para teoremas de suficiencia global.

6. Red Conceptual

- **Optimización Matemática** [155]
  - Objetivo: Selección del mejor elemento (máximo/mínimo) de un conjunto [155].
  - Función Objetivo ($f(\mathbf{x})$): Función a maximizar o minimizar [156].
  - Espacio de Búsqueda/Conjunto Factible (A): Conjunto de soluciones permitidas, a menudo con restricciones [157].
  - Tipos de Óptimos: Local (en una vecindad) vs. Global (en todo el dominio).
- **Formas Cuadráticas** [1]
  - Definición: Expresión polinómica homogénea de grado dos ($\sum a_{ij}x_ix_j$) [1].
  - Expresión Matricial: $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ [1].
  - Matriz Asociada ($\mathbf{A}$): Siempre puede hacerse simétrica [2].
  - Signo de la Forma: Determina la curvatura [4].
    - Definida Positiva (DP), Definida Negativa (DN), Semidefinida Positiva (SDP), Semidefinida Negativa (SDN), Indefinida.
    - Criterios para determinar el signo:
      - ◇ Autovalores de $\mathbf{A}$.
      - ◇ Criterio de Sylvester (Menores Principales Dominantes $|A_i|$ y otros menores $|\tilde{A}_k|$):
      - ◇ DP: $|A_i| > 0$ para todo i.
      - ◇ DN: $(-1)^i|A_i| > 0$ para todo i.
      - ◇ Semidefinidas: $|A| = 0$ y condiciones en menores.
  - Formas Cuadráticas Restringidas: Evaluadas en un subespacio lineal ($\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$).
    - Matriz Bordeada (Orleada) $\bar{\mathbf{A}}$ [14, 16].
    - Reglas de signo específicas para $\bar{\mathbf{A}}_i$ con m restricciones.
- **Optimización Libre**
  - Hipótesis: Función $f(\mathbf{x})$ es $\mathbf{C^2}$ (dos veces continuamente diferenciable).
  - Secuencia Lógica del Cálculo:

a) **Condiciones Necesarias de Primer Orden (CNPO):** [20]
- $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ (todas las derivadas parciales igual a cero).
- Identifica **puntos críticos/estacionarios** (candidatos a óptimos) [20].

b) **Condiciones Suficientes de Segundo Orden (CSSO):**
- Utiliza la **Matriz Hessiana (H)** de $f(\mathbf{x})$.
- Evalúa $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ en cada punto crítico [38].
- Clasificación basada en el signo de $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ (usando menores principales directores):
  - ⋄ **Máximo Local: H** Definida Negativa ($|H_1| < 0, |H_2| > 0, \dots$).
  - ⋄ **Mínimo Local: H** Definida Positiva ($|H_1| > 0, |H_2| > 0, \dots$).
  - ⋄ **Punto de Silla: H** Indefinida [38].

- **Teorema de la Envolvente (Optimización Libre):** [40]
  - Cómo el valor óptimo cambia con un parámetro (α) [40].
  - $\frac{df^*(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial f(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha}$.

▪ **Optimización con Restricciones de Igualdad** [161]
- Problema: Maximizar/Minimizar $f(\mathbf{x})$ s.a. $g_j(\mathbf{x}) = c_j$.
- Método: **Multiplicadores de Lagrange**.
- Secuencia Lógica del Cálculo:

a) **Formular la Lagrangiana ($\mathcal{L}$):** $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum \lambda_j [c_j - g_j(\mathbf{x})]$ [55].

b) **CNPO:** $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$ (todas las derivadas parciales de $\mathcal{L}$ son cero) [55].

c) **CSSO:**
- Utiliza el **Hessiano Orlado ($\bar{\mathbf{H}}$)** de $\mathcal{L}$ [59].
- Reglas de signo para los menores principales de $\bar{\mathbf{H}}$ (considerando m restricciones y n variables).

- **Multiplicadores de Lagrange (λ_j):**
  - Interpretación: **Precio Sombra** de la restricción.
  - $\lambda_j^* = \frac{df^*}{dc_j}$ (cambio marginal en el valor óptimo por cambio en la restricción).

▪ **Optimización con Restricciones de Desigualdad**
- Problema: Maximizar/Minimizar $f(\mathbf{x})$ s.a. $g_j(\mathbf{x}) \leq r_j$ y $x_i \geq 0$ [163].
- Método: **Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**.
- Secuencia Lógica del Cálculo:

a) **Formular la Lagrangiana ($\mathcal{L}$):** Similar al caso de igualdad, pero las restricciones de desigualdad reescritas [84].

b) **CNPO (KKT):**
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \leq 0, x_i \geq 0, x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ (holgura complementaria para variables).
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = r_j - g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \lambda_j \geq 0, \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0$ (holgura complementaria para multiplicadores/restricciones).

c) ón de Restricciones (CQ): [94]
- Condición necesaria para que las KKT sean necesarias [94].
- Satisfecha automáticamente si las restricciones son lineales [101].

d) Global (Teoremas): [109]
- Para garantizar)[164].$\lambda_j^* = 0 \implies$ restricción inactiva ($g_j(\mathbf{x}^*) < r_j$).
- $x_i^* > 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ [164].
- $x_i^* = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \leq 0$ [164].

- y Convexidad de Funciones
  - Propiedad que describe la curvatura de una función.
  - Tipos:

- ◇ Cóncava: Gráfica çurva hacia abajo". Hessiana Semidefinida Negativa [139].
- ◇ Convexa: Gráfica çurva hacia arriba". Hessiana Semidefinida Positiva [139].
- ◇ Cuasicóncava: Conjunto de niveles superiores es convexo. Matriz B Semidefinida Negativa [125].
- ◇ Cuasiconvexa: Conjunto de niveles inferiores es convexo. Matriz B Semidefinida Positiva [125].

- ○ Relación: Cóncava $\implies$ Cuasicóncava, pero no a la inversa [121].
- ○ Relevancia: Crucial para la global de los óptimos [139, 146].

7. Preguntas Frecuentes (FAQs)

1. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre una Condición Necesaria de Primer Orden (CNPO) y una Condición Suficiente de Segundo Orden (CSSO) en optimización libre? ¿Qué tipo de información proporciona cada una, y por qué se necesitan ambas para caracterizar un extremo? Las **CNPO** establecen que en un punto crítico el gradiente de la función debe ser nulo. Estas condiciones solo identifican los **candidatos** a extremos (máximos, mínimos o puntos de silla). Por sí solas, no pueden distinguir la naturaleza del extremo. Las **CSSO** utilizan las segundas derivadas (representadas en la matriz Hessiana) para analizar la curvatura de la función en el punto crítico [33, 165]. Proporcionan información distintiva para **clasificar** el punto como máximo local, mínimo local o punto de silla. Ambas son necesarias porque las CNPO reducen el espacio de búsqueda a los puntos estacionarios, y las CSSO complementan esta información al especificar la naturaleza del extremo [165].

2. ¿Cómo se forma la función Lagrangiana para un problema de optimización con restricciones de igualdad, y cuál es la utilidad principal de los multiplicadores de Lagrange? La **función Lagrangiana ($\mathcal{L}$)** se forma combinando la función objetivo con cada una de las restricciones de igualdad. Para maximizar $f(\mathbf{x})$ sujeto a $g_j(\mathbf{x}) = c_j$, la Lagrangiana es $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum \lambda_j [c_j - g_j(\mathbf{x})]$. Su utilidad es transformar un problema de optimización restringida en uno de optimización libre sobre la Lagrangiana. Los **multiplicadores de Lagrange (λ_j)Una función es **cóncava** si el segmento de línea que une dos puntos cualesquiera de su gráfica se encuentra siempre por debajo o sobre la gráfica. Formalmente, $f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$. Una función es **cuasicóncava** si todos sus conjuntos de niveles superiores (es decir, el conjunto de puntos para los cuales la función es mayor o igual que un valor constante) son convexos [43, 122]. Toda función cóncava es cuasicóncava, pero no a la inversa [43, 121]. Esta distinción es crucial en economía porque funciones como la de utilidad, aunque no siempre son cóncavas (lo que implicaría utilidad marginal decreciente de forma estricta), casi siempre son cuasicóncavas. La cuasiconcavidad es suficiente para asegurar que el conjunto de cestas de consumo que otorgan un cierto nivel de utilidad sea convexo, lo que es necesario para la optimización de la utilidad y para que un óptimo local sea global en problemas con conjuntos factibles convexos.

4. En el contexto de las condiciones Karush-Kuhn-Tucker (KKT), ¿qué significan las condiciones de holgura complementaria para las variables de elección y para los multiplicadores? Las **condiciones de holgura complementaria** en KKT establecen una relación binaria crucial entre las variables y sus condiciones marginales, o entre los multiplicadores de Lagrange y las restricciones.

- Para una variable de elección x_i: $\mathbf{x_i}(\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{x_i}) = \mathbf{0}$. Esto implica que si $\mathbf{x_i^*} > \mathbf{0}$ (la variable se produce/consume), entonces su contribución marginal neta debe ser cero ($\partial\mathcal{L}/\partial x_i = 0$). Si $\mathbf{x_i^*} = \mathbf{0}$ (no se produce/consume), entonces su contribución marginal neta debe ser no positiva ($\partial\mathcal{L}/\partial x_i \leq 0$).
- Para un multiplicador de Lagrange λ_j: $\boldsymbol{\lambda_j}(\partial\mathcal{L}/\partial\boldsymbol{\lambda_j}) = \mathbf{0}$. Esto implica que si $\boldsymbol{\lambda_j^*} > \mathbf{0}$ (el precio sombra es positivo), entonces la restricción asociada está **activa** (se cumple con igualdad: $g_j(\mathbf{x}^*) = r_j$). Si $\boldsymbol{\lambda_j^*} = \mathbf{0}$ (el precio sombra es cero), entonces la restricción está **inactiva** (hay holgura: $g_j(\mathbf{x}^*) < r_j$).

5. ¿Cómo se determina la curvatura de la función en un punto crítico. Los diferentes "signos"de una forma cuadrática proporcionan la siguiente información:

- **Definida Positiva (DP):** La forma cuadrática siempre toma valores positivos. En optimización, esto indica un **mínimo local** (la función se curva "hacia arribaçomo un tazón).
- **Definida valores no negativos o no positivos, respectivamente, y puede ser cero para vectores no nulos. En las CSSO, esto a menudo lleva a un resultado **inconcluso**, requiriendo análisis adicionales para clasificar el punto crítico.

DERIVADAS , DERIVADAS PARCIALES

@toobaziti

Disclaimer: Este documento ha sido elaborado a partir de la grabación de una clase, el slide visto en clase y el texto recomendados. Puede contener errores u omisiones asociados a la calidad del audio, cortes involuntarios o dificultades de transcripción. Por favor, consúltese siempre la fuente original de la grabación si se requiere confirmación de algún detalle.

Índice

1. Propósito y Contexto General **1**

2. Derivadas de una Variable **1**
2.1. Definición y Notación 1
2.2. Contexto e Intuición Matemática 1
2.3. Ideas Clave 2
2.4. Fórmulas y Reglas de Derivación 2
2.5. Ejemplos Prácticos y Analogías 2
2.6. Conclusiones Parciales 3

3. Derivadas Parciales **3**
3.1. Definición y Notación 3
3.2. Contexto e Intuición Matemática 3
3.3. Ideas Clave 4
3.4. Ejemplos Prácticos 4
3.5. Diferenciabilidad y el Diferencial Total 4
3.5.1. Diferenciabilidad Multivariable 4
3.5.2. El Diferencial Total (dz) 5
3.6. Conclusiones Parciales 6

4. Derivadas de Orden Superior y Teorema de Schwarz **6**

5. Red Conceptual Básica **6**

6. Conclusión Global **8**

1. Propósito y Contexto General

Las **derivadas** son herramientas matemáticas fundamentales que permiten **cuantificar y analizar cómo cambian las variables** en un sistema. En su forma más básica, miden la rapidez con la que una variable cambia con respecto a otra . Este concepto se extiende a las **derivadas parciales**, que abordan funciones con múltiples variables, midiendo el cambio cuando solo una de ellas varía, manteniendo las demás constantes. En economía, estas herramientas son cruciales para el **análisis dinámico**, que modela la evolución continua de variables como la población o los precios a lo largo del tiempo, y para el **análisis estático comparativo**, que examina cómo los equilibrios de un modelo cambian ante variaciones en parámetros exógenos . Las derivadas parciales permiten resolver problemas como determinar la **sensibilidad de la demanda** ante cambios en el precio manteniendo el ingreso constante, o calcular el **producto marginal** de un factor en una función de producción multivariable. Asimismo, son esenciales para derivar **conceptos marginales** como el costo marginal o el ingreso marginal. Los **prerrequisitos esenciales** para comprender estos conceptos incluyen el manejo de álgebra básica, funciones reales, límites, y las reglas de derivación fundamentales.

2. Derivadas de una Variable

2.1. Definición y Notación

La **derivada** de una función $f(x)$ con respecto a la variable x en un punto x_0 se define formalmente como el **límite del cociente de diferencias** $(\Delta y/\Delta x)$ cuando el cambio en la variable independiente (Δx) tiende a cero. Se expresa como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

donde $h = \Delta x$ es un incremento pequeño en x.
La notación más común para una función de una sola variable, $y = f(x)$, incluye:

- $f'(x)$: leída como "f prima de x".
- dy/dx: leída como "derivada de y con respecto a x".

Ambas notaciones representan la **tasa de cambio instantánea** de y cuando x cambia [17].

2.2. Contexto e Intuición Matemática

La derivada mide la **tasa de cambio instantánea** de una función. Geométricamente, la derivada dy/dx en un punto específico (x_0, y_0) es la **pendiente de la recta tangente** a la curva de la función en ese punto. Si la derivada es positiva, la función crece; si es negativa, decrece; y si es cero, puede indicar un máximo o mínimo local . La intuición detrás de la derivada es responder a la pregunta: **"¿Qué tan rápido está cambiando algo en este instante?"** . Por ejemplo, si se piensa en la pendiente de una carretera, la derivada nos dice cuán inclinada está en un punto específico .

2.3. Ideas Clave

- **Tasa de Cambio Instantánea:** La derivada cuantifica la rapidez con la que una variable dependiente cambia con respecto a una independiente en un instante dado.
- **Pendiente de la Tangente:** Geométricamente, representa la inclinación de la recta que "toca"la curva en un solo punto.
- **Base de Conceptos Marginales:** Es fundamental en economía para definir el costo marginal, ingreso marginal, y productividad marginal, que miden el cambio por unidad adicional.
- **Continuidad como Prerrequisito:** Una función debe ser continua en un punto para ser derivable allí, aunque la continuidad por sí sola no es suficiente para garantizar la diferenciabilidad si hay "picos.º .esquinas".

2.4. Fórmulas y Reglas de Derivación

El cálculo de derivadas se simplifica mediante **reglas de diferenciación**, evitando el uso directo de la definición de límite. Algunas de las reglas fundamentales son:

- **Regla de la Potencia:** Si $y = x^n$, entonces $dy/dx = nx^{n-1}$.
- **Regla de la Suma/Diferencia:** Si $y = f(x) \pm g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x) \pm g'(x)$.
- **Regla del Producto:** Si $y = f(x)g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- **Regla del Cociente:** Si $y = f(x)/g(x)$, entonces $dy/dx = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]/[g(x)]^2$.
- **Regla de la Cadena:** Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces $dy/dx = (dy/du)(du/dx)$. Es crucial para derivar funciones compuestas.

Ejemplo: Calcular $f'(x)$ para $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(3x^2) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(2) && \text{(Aplicando la regla de la suma/resta)} \\ &= 3 \cdot 2x^{2-1} - 5 \cdot 1x^{1-1} + 0 && \text{(Aplicando la regla de la potencia)} \\ &= 6x - 5 && \text{(Simplificación)} \end{aligned}$$

2.5. Ejemplos Prácticos y Analogías

- **Costo Marginal:** Si $C(Q)$ es la función de costo total de producir Q zapatillas, la derivada dC/dQ (costo marginal) indica **cuánto cuesta producir una zapatilla adicional en ese momento**. Si $dC/dQ = 10$ a un nivel de $Q = 100$, la zapatilla 101 costaría aproximadamente \$10.
- **Pendiente de una Carretera:** La derivada ordinaria es como medir cuán inclinada está una carretera en un punto específico. Si es un valor positivo, la carretera sube; si es negativo, baja.

2.6. Conclusiones Parciales

Las derivadas de una variable son la base del cálculo diferencial, permitiendo cuantificar el cambio instantáneo y la pendiente de una función en cualquier punto. Son indispensables para el análisis dinámico y la formulación de conceptos marginales en economía [1, 10]. Su comprensión rigurosa, basada en límites y reglas de diferenciación, es un paso fundamental para extender el análisis a funciones más complejas de múltiples variables [25].

3. Derivadas Parciales

3.1. Definición y Notación

Cuando una función depende de dos o más variables independientes (ej., $z = f(x, y)$), se utilizan **derivadas parciales**. Una derivada parcial mide la tasa de cambio de la función con respecto a una **sola de sus variables independientes**, manteniendo las demás constantes.
Para una función $z = f(x, y)$, la derivada parcial con respecto a x se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \tag{2}$$

Similarmente, para y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} [34] \tag{3}$$

La notación para derivadas parciales usa el símbolo rizado ∂:

- $\partial f/\partial x_i$: leída como "derivada parcial de f con respecto a x sub i".
- f_{x_i}: leída como "f sub x i".

Al calcular f_x, se considera y como una constante y se deriva con respecto a x. De manera similar, para f_y, se considera x constante y se deriva con respecto a y.

3.2. Contexto e Intuición Matemática

Las derivadas parciales son fundamentales en economía porque muchos fenómenos dependen de múltiples factores, como la producción de una empresa (capital y trabajo) [5]. Permiten **aislar el efecto individual de cada factor** en la función, sin que los demás factores cambien [6].
Geométricamente, para una superficie definida por $z = f(x, y)$, la derivada parcial $\partial f/\partial x$ en un punto (x_0, y_0, z_0) representa la **pendiente de la superficie en la dirección** x (manteniendo y constante), y $\partial f/\partial y$ es la pendiente en la dirección y (manteniendo x constante) [32, 38, 39]. Una analogía es un **mapa topográfico**, donde las derivadas parciales miden la inclinación del terreno si se camina solo hacia el norte (eje y) o hacia el este (eje x), por separado.

3.3. Ideas Clave

- **Medición Aislada del Cambio:** La derivada parcial mide cómo cambia una función multivariable cuando solo una de sus variables independientes se modifica, manteniendo las demás constantes.
- **Esencial para Modelos Multivariables:** Son indispensables en campos como la economía, donde las funciones (ej., producción, utilidad) dependen de varios insumos o factores simultáneamente .
- **Pendiente en una Dirección Específica:** Geométricamente, representa la inclinación de la superficie en la dirección de la variable que se está derivando .
- **La Existencia No Garantiza Continuidad:** A diferencia de las funciones de una variable, la existencia de derivadas parciales en un punto no asegura la continuidad de la función en ese punto.
- **Continuidad de Parciales Implica Diferenciabilidad:** Si las derivadas parciales de una función son continuas en una región, entonces la función es diferenciable en esa región, lo que implica que es "suavez sin picos.

3.4. Ejemplos Prácticos

- **Función de Producción Cobb-Douglas:** Para $Q(K, L) = 5K^{0,4}L^{0,6}$ (producción Q en función de capital K y trabajo L), el **producto marginal del trabajo** (PM_L) se calcula derivando Q con respecto a L:

$$PM_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 5K^{0,4} \cdot 0{,}6L^{(0,6-1)}$$
$$PM_L = 3K^{0,4}L^{-0,4}$$

  Esto indica el aumento en la producción por cada unidad adicional de trabajo, manteniendo fijo el capital [16].

- **Cálculo de Parciales:** Para $f(x, y) = x^2y + 3y$, las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \text{(tratando } y \text{ como constante)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3 \qquad \text{(tratando } x \text{ como constante)}$$

3.5. Diferenciabilidad y el Diferencial Total

3.5.1. Diferenciabilidad Multivariable

Una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en un punto (x_0, y_0) si puede aproximarse localmente por un plano tangente, es decir, si es "suavez no contiene cúspides, aristas, o roturas. Formalmente, f es diferenciable en (x_0, y_0) si el cambio real Δz puede expresarse como:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy + E_x dx + E_y dy \tag{4}$$

donde E_x y E_y son funciones de dx y dy que tienden a cero a medida que dx y dy tienden a cero (es decir, a medida que la distancia del punto (dx, dy) al origen se hace pequeña).
A diferencia de las funciones de una variable, la **existencia de las derivadas parciales no garantiza la diferenciabilidad** en funciones de varias variables. Sin embargo, si las derivadas parciales f_x y f_y son **continuas** en una región, entonces la función f es diferenciable en esa región [44-46].
Contraejemplo: La función $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$ [51-53]. Sus derivadas parciales $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$ existen [51-53]. Sin embargo, estas derivadas parciales no son continuas en $(0, 0)$, y la función misma no es continua en $(0, 0)$. Por el Teorema 104, si una función no es continua en un punto, no es diferenciable en ese punto.

3.5.2. El Diferencial Total (dz)

El **diferencial total** de una función multivariable ($z = f(x, y)$) es una **aproximación lineal** del cambio total en z resultante de cambios infinitesimales en sus variables independientes x y y [56-59]. Se define como:

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy \tag{5}$$

Esta definición se extiende a cualquier número de variables. Para $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, el diferencial total es:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{6}$$

La intuición es que el **cambio total en z es aproximadamente la suma de los cambios individuales causados por cada variable** [56, 65]. Cada cambio individual se calcula como la "sensibilidad"de z a esa variable (derivada parcial) multiplicada por el "pequeño cambio.en esa variable (diferencial) [65, 66]. El diferencial total es una **suma ponderada de los efectos marginales** [65, 67].
Ejemplos de Aplicación:

- **Encontrando el Diferencial Total:** Para $z = x^4 e^{3y}$, se calculan las derivadas parciales $f_x = 4x^3 e^{3y}$ y $f_y = 3x^4 e^{3y}$. El diferencial total es:

$$dz = 4x^3 e^{3y} dx + 3x^4 e^{3y} dy$$

- **Aproximación de Valores de Función:** El diferencial total dz puede usarse para aproximar el cambio real Δz cuando dx y dy son pequeños. Por ejemplo, para aproximar $f(4{,}1, 0{,}8)$ de $z = \sqrt{x} \sin y$ usando $f(4, \pi/4)$, se calcula $dz(4, \pi/4) \approx 0{,}039$, y así $f(4{,}1, 0{,}8) \approx f(4, \pi/4) + dz \approx 1{,}414 + 0{,}039 = 1{,}453$. La idea es: "Nueva posición ≈ vieja posición + cantidad aproximada de cambio".

- **Análisis de Error/Sensibilidad:** El diferencial total es útil para aproximar la propagación de errores. Por ejemplo, para un tanque cilíndrico con volumen $V = \pi r^2 h$, el diferencial total es $dV = (2\pi rh)dr + (\pi r^2)dh$. Los coeficientes $V_r = 2\pi rh$ y $V_h = \pi r^2$ indican la sensibilidad del volumen a cambios en el radio (dr) o la altura (dh). Un coeficiente de mayor magnitud indica mayor sensibilidad .

Analogía: Imagina una **colina** cuya altura H depende de sus coordenadas (x, y). Las derivadas parciales $\partial H/\partial x$ y $\partial H/\partial y$ te dicen la inclinación si caminas solo en dirección este-oeste o norte-sur, respectivamente. El **diferencial total** dH combina estos cambios para decirte cómo cambia tu altura si caminas en una dirección que mezcla ambos desplazamientos. Es la altura del **plano tangente** a la superficie en la dirección de los cambios (dx, dy).

3.6. Conclusiones Parciales

El concepto de diferenciabilidad es clave para entender cuándo una función multivariable es "suavez puede ser bien aproximada localmente [47, 48]. El diferencial total (dz) proporciona una **aproximación lineal precisa** del cambio en una función de varias variables para pequeños movimientos en sus entradas. Esta herramienta es fundamental no solo para la comprensión teórica de la diferenciabilidad, sino también para **aplicaciones prácticas** como la aproximación de valores funcionales y el análisis de propagación de errores y sensibilidad en diversas disciplinas [57, 67, 72-74].

4. Derivadas de Orden Superior y Teorema de Schwarz

Es posible calcular **derivadas parciales de órdenes superiores a uno** si existen. Por ejemplo, la segunda derivada parcial respecto a x es $\partial^2 f/\partial x^2$, y las **derivadas cruzadas** son $\partial^2 f/\partial y \partial x$ (primero respecto a x, luego a y) y $\partial^2 f/\partial x \partial y$ (primero respecto a y, luego a x).
El **Teorema de Schwarz** (también conocido como Teorema de Young) establece que si las segundas derivadas parciales cruzadas de una función (f) son **continuas** en una región, entonces son **iguales**, independientemente del orden de derivación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{7}$$

Este teorema se aplica a funciones de cualquier número de variables siempre que las derivadas parciales de segundo orden sean continuas [80].
Las derivadas de orden superior, en particular las segundas derivadas parciales, se organizan en una matriz conocida como la **Matriz Hessiana** $(H_f$ o $D^2 f)$:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \text{ [81]} \tag{8}$$

La Matriz Hessiana es una herramienta vital en la optimización multivariable, utilizada para clasificar puntos críticos (máximos, mínimos o puntos de silla) .

5. Red Conceptual Básica

- **Conceptos Principales:**
  - Derivada (ordinaria): Mide el cambio en funciones de una variable.

- Derivada Parcial: Extiende la derivada a funciones de múltiples variables, analizando el cambio respecto a una sola variable manteniendo las demás fijas.
- Diferenciabilidad: Propiedad que asegura que una función es "suavez puede ser bien aproximada localmente.
- Diferencial Total (dz): Una aproximación lineal del cambio en una función multivariable.
- Derivadas de Orden Superior: Derivadas de las derivadas, miden la curvatura y tasas de cambio de tasas de cambio.
- Matriz Hessiana: Matriz de segundas derivadas parciales, clave para la optimización multivariable.
- Teorema de Schwarz: Establece la igualdad de las derivadas parciales cruzadas bajo condiciones de continuidad.

- **Axiomas o Postulados:**
  - El concepto de **Límite** es fundamental para la definición de derivada y derivada parcial.
  - Las funciones deben ser **continuas** en el punto de análisis para ser derivables (condición necesaria, pero no suficiente para funciones multivariables).
  - La **continuidad de las derivadas parciales** es una condición suficiente para la diferenciabilidad de una función multivariable.
- **Relaciones entre Conceptos:**
  - La Derivada Parcial es una extensión natural de la Derivada ordinaria, aplicando el mismo principio de límite en un contexto multivariable.
  - El Diferencial Total es una **aproximación lineal** del cambio real en una función multivariable, construida a partir de sus derivadas parciales y los cambios infinitesimales en sus variables.
  - La Diferenciabilidad garantiza la validez de esta aproximación lineal por el diferencial total, indicando la "suavidad"de la función.
  - El Teorema de Schwarz es una propiedad importante de las derivadas parciales, que simplifica el cálculo de derivadas cruzadas si son continuas.
  - La Matriz Hessiana se compone de segundas derivadas parciales y es el criterio principal para clasificar extremos en optimización multivariable.
- **Utilidades Principales:**
  - Medición de la **tasa de cambio instantánea** y la **pendiente** de una función en un punto dado.
  - **Optimización** de funciones para encontrar máximos y mínimos, crucial en la teoría económica (ej., maximización de beneficios, minimización de costos).
  - **Análisis estático comparativo** en economía, para determinar cómo los valores de equilibrio cambian ante perturbaciones exógenas.

- Derivación de **conceptos marginales** clave en economía (costo marginal, producto marginal, ingreso marginal).
- **Aproximación de funciones** y **análisis de error/sensibilidad** en diversas aplicaciones.

- **Secuencia Paso a Paso de Comprensión:**
  - Entender el concepto de **Límite** como base del cálculo diferencial.
  - Definir y calcular la **Derivada ordinaria** para funciones de una sola variable.
  - Extender este concepto a la **Derivada Parcial** para funciones de múltiples variables, aprendiendo a fijar las demás variables.
  - Comprender la **Diferenciabilidad** y el **Diferencial Total** como la mejor aproximación lineal de una función multivariable.
  - Analizar **Derivadas de Orden Superior** y la Matriz Hessiana para estudiar la curvatura y la optimización de funciones.

6. Conclusión Global

Las derivadas y derivadas parciales son herramientas analíticas indispensables que permiten cuantificar y comprender el cambio [1, 2]. Mientras que las derivadas abordan las tasas de cambio instantáneas en funciones de una sola variable, las derivadas parciales extienden este análisis a sistemas multivariables, aislando el impacto de cada factor [4, 5]. La diferenciabilidad y el diferencial total complementan esto al proporcionar una aproximación lineal del cambio total y permitir el análisis de sensibilidad . Estos conceptos son pilares para la optimización, el análisis estático comparativo y la formulación de teorías económicas, transformando problemas complejos en estructuras manejables [10, 85].

FAQs

¿Cuál es la diferencia fundamental entre una derivada y una derivada parcial?

Una **derivada ordinaria** mide la tasa de cambio de una función con respecto a una **sola variable independiente**. Una **derivada parcial** mide la tasa de cambio de una función con respecto a una **de sus múltiples variables independientes, manteniendo todas las demás constantes** [4-6].

¿Qué significa la derivada parcial geométricamente?

Geométricamente, la derivada parcial de una función $z = f(x, y)$ con respecto a x (o y) en un punto es la **pendiente de la superficie en la dirección del eje x (o y)**, respectivamente, manteniendo la otra variable fija. Puede visualizarse como la inclinación del terreno si se camina solo en una dirección cardinal [21, 40].

¿Por qué la continuidad es necesaria para la diferenciabilidad, pero no suficiente en funciones multivariables?

La **continuidad** es una condición **necesaria** porque una función con saltos o huecos no puede tener una pendiente bien definida en esos puntos [23]. Sin embargo, no es **suficiente** para funciones multivariables porque una función puede ser continua pero tener "picos.º .esquinas afiladas"(como el contraejemplo $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ en el origen), donde la pendiente no está bien definida en todas las direcciones, impidiendo que sea diferenciable.

¿Cuál es la interpretación económica de una derivada parcial, como el producto marginal del trabajo?

En economía, una derivada parcial como el **producto marginal del trabajo** ($\partial Q/\partial L$) en una función de producción $Q(K, L)$ indica la **cantidad de producción adicional que se obtendría al aumentar una unidad infinitesimal de trabajo**, manteniendo la cantidad de capital (K) constante [9, 16, 86]. Es una medida de la contribución marginal de un factor de producción [9].

¿Qué establece el Teorema de Schwarz y por qué es importante?

El **Teorema de Schwarz** (o Young) establece que si las **segundas derivadas parciales cruzadas** de una función son **continuas** en una región, entonces **son iguales**, independientemente del orden de derivación ($\partial^2 f/\partial y \partial x = \partial^2 f/\partial x \partial y$). Es importante porque simplifica los cálculos y es crucial para la clasificación de puntos críticos (máximos, mínimos) en problemas de optimización, donde se utiliza la Matriz Hessiana.

INTEGRALES INDEFINIDAS SIMPLES

@toobaziti

Disclaimer: Este documento ha sido elaborado a partir de la grabación de una clase, el slide visto en clase y el texto recomendados. Puede contener errores u omisiones asociados a la calidad del audio, cortes involuntarios o dificultades de transcripción. Por favor, consúltese siempre la fuente original de la grabación si se requiere confirmación de algún detalle.

Índice

1. Integrales Indefinidas: Conceptos Fundamentales y Aplicaciones **1**
- 1.1. Propósito y Contexto . . . 1
- 1.2. Notación y Vocabulario Clave . . . 1
- 1.3. Objeto Central: La Familia de Antiderivadas . . . 2
- 1.4. Hipótesis y Regularidad . . . 2
- 1.5. Resultados y Procedimientos Clave . . . 2
  - 1.5.1. Reglas Clave de Integración . . . 3
  - 1.5.2. Esquema de Pasos (Receta) . . . 3
  - 1.5.3. Errores Comunes . . . 4
- 1.6. Interpretación Geométrica y Económica . . . 4
- 1.7. Casos y Variantes . . . 4
- 1.8. Conexiones con Otros Temas y Errores Frecuentes . . . 5
  - 1.8.1. Puentes con otros temas del programa . . . 5
  - 1.8.2. Fallos Comunes y Detección . . . 5
- 1.9. Práctica Esencial . . . 6
- 1.10. Síntesis y Ampliación . . . 7

2. Red Conceptual Básica **7**

3. Conclusión Global **8**

4. Preguntas Frecuentes (FAQs) **9**
- 4.1. ¿Qué es una función primitiva o antiderivada de $f(x)$? . . . 9
- 4.2. ¿Por qué la integral indefinida de una función $f(x)$ no es única? . . . 9
- 4.3. ¿Qué representa el símbolo "dx."[en] la notación de la integral indefinida $\int f(x)dx$? . . . 9
- 4.4. Menciona una condición fundamental para que la integral indefinida de una función $f(x)$ exista en un intervalo. . . . 9
- 4.5. En un contexto económico, si integramos la función de Costo Marginal, ¿qué obtenemos y qué representa la constante de integración? . . . 9

1. Integrales Indefinidas: Conceptos Fundamentales y Aplicaciones

1.1. Propósito y Contexto

Las **integrales indefinidas** son una operación fundamental en el cálculo que resuelven el **problema inverso de la derivación** [1-4]. Si la derivación nos permite conocer la tasa de cambio de una función (su derivada), la integración indefinida busca **-econstruir"la función original** (conocida como función primitiva o antiderivada) a partir de esa tasa de cambio [1-5]. Es, en esencia, "deshacer"la derivada [6].
Esta herramienta es **crucial** en diversas disciplinas:

- **Física:** Permite calcular el desplazamiento a partir de la velocidad, o la velocidad a partir de la aceleración [1, 7, 8].
- **Biología:** Se utiliza para modelar el crecimiento poblacional acumulado [1, 7-9].
- **Ingeniería:** Ayuda a calcular la carga total a partir de densidades o la energía [7, 8].
- **Economía:** Sus aplicaciones son vitales para entender el comportamiento de variables acumuladas [1, 7, 8, 10, 11]. Por ejemplo, al integrar una función de **Costo Marginal (CMg)** se obtiene la función de **Costo Total (CT)**, y al integrar el **Ingreso Marginal (IMg)** se llega al **Ingreso Total (IT)** [1, 5, 8, 10, 12, 13]. También es útil para calcular el valor presente de flujos de efectivo futuros [10]. En modelos de acumulación de capital, permite encontrar el stock total de capital a lo largo del tiempo [14].

Para comprender las integrales indefinidas, es **esencial dominar el cálculo diferencial**, las reglas de derivación y la notación de funciones, ya que ambas operaciones están íntimamente ligadas y üna sin la otra carece de sentido pleno"[5, 15-17].

1.2. Notación y Vocabulario Clave

La notación de la integral indefinida es $\int f(x)dx = F(x) + C$ [17-21]. Cada elemento tiene un significado específico:

- **Símbolo de integral ($\int$):** Indica la operación de integración [17, 21-23].
- **Integrando ($f(x)$):** Es la función que se va a integrar [17, 21-23]. Es la derivada de la función que buscamos [17].
- **Diferencial de la variable de integración (dx):** Especifica la variable respecto a la cual se está realizando la integración [17, 21-25]. Sin este elemento, la notación estaría incompleta [17].
- **Función primitiva o antiderivada ($F(x)$):** Es cualquier función cuya derivada es el integrando, es decir, $F'(x) = f(x)$ [17, 19, 22, 25-29].
- **Constante de integración (C):** Un valor arbitrario que se añade a la antiderivada [17, 21, 22, 26-28, 30]. Su presencia es **fundamental** porque "la derivada de cualquier constante es cero"[17, 28, 31-35].

La convención principal es que la integral indefinida de una función **no es una función única**, sino una familia completa de funciones que difieren solo por una constante [18, 27-29, 36, 37].

1.3. Objeto Central: La Familia de Antiderivadas

El objeto central de la integral indefinida es una **familia infinita de funciones primitivas** [38]. Esto se denota como $\int f(x)dx = F(x) + C$, donde $F(x)$ es *cualquier* función cuya derivada es $f(x)$, y C es una constante arbitraria [18, 30, 38]. La existencia de esta constante C es la razón por la que "hay un número infinito de funciones que pueden encajar en la definición verbal de una integral indefinida F(x)"[37], y por lo tanto, "no puede haber una definición de límite de integrales indefinidasçomo la hay para las derivadas [37]. Esto se debe a que las integrales indefinidas son un concepto "nebuloso y abstracto"por su naturaleza no única [37].
Ejemplos intuitivos sin cálculo para fijar intuición:

- Si el **Ingreso Marginal** ($IM(Q)$) de una empresa es constante e igual a 5, entonces la función de **Ingreso Total** ($IT(Q)$) es de la forma $IT(Q) = 5Q + C$. La C podría representar un ingreso fijo inicial [39].
- Si la **velocidad** de un vehículo es 10 km/h ($v(t) = 10$), entonces la **distancia recorrida** ($d(t)$) podría ser $d(t) = 10t + C$. La C representaría la posición inicial del vehículo [39, 40].
- Si el **Costo Marginal** ($CM(Q)$) es constante, por ejemplo $CM(Q) = 5$, entonces el **Costo Total** ($CT(Q)$) es $CT(Q) = 5Q + C$. En este caso, C son los costos fijos [41].

Estos ejemplos demuestran cómo la integral indefinida nos permite pasar de una "tasa de cambio.ª la çantidad total.º .ªcumulada", con la aparición de la constante C que representa el punto de partida o un valor fijo asociado al fenómeno [42].

1.4. Hipótesis y Regularidad

Para que una integral indefinida de una función $f(x)$ exista y sea "simple"de encontrar, la condición más importante es que la función $f(x)$ sea **continua** en el intervalo de interés [11, 18, 27, 42-45]. La continuidad asegura que la función no tiene saltos ni interrupciones bruscas, lo cual es esencial para el concepto de acumulación que representa la integración [18, 26, 42].
Contraejemplo breve: Si una función $f(x)$ tiene una **discontinuidad de salto** (como $f(x) = 1$ para $x < 0$ y $f(x) = 2$ para $x \geq 0$) [44] o una discontinuidad infinita (como $f(x) = 1/x^2$ en $x = 0$) [45, 46], la .ªntiderivadarequeriría una constante de integración diferente para cada intervalo, o simplemente no existiría como una única función continua en todo el dominio [44-46]. Esto rompe la idea de una única familia de antiderivadas con una sola constante C [44, 45].

1.5. Resultados y Procedimientos Clave

La integración indefinida se basa en las **reglas básicas de la integración**, que son las **inversas de las reglas de diferenciación** [6, 47-52].

1.5.1. Reglas Clave de Integración

Las reglas más básicas incluyen:

1. **Regla de la potencia:** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, para $n \neq -1$ [6, 47-50, 53-56].
2. **Integral de una constante:** $\int k dx = kx + C$ [6, 47-50, 57].
3. **Integral de una constante por una función:** $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ [6, 47-51, 58, 59].
4. **Integral de una suma/resta:** $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ [6, 47-51, 60].
5. **Integral de $1/x$:** $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ [47, 49, 53, 54, 61-64]. Es crucial incluir el valor absoluto porque el logaritmo natural solo está definido para números positivos, pero $1/x$ existe para $x < 0$ también [26, 65].
6. **Integral de la función exponencial:** $\int e^x dx = e^x + C$ [47, 49, 53, 54, 56, 61-63].
7. **Integral de a^x:** $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, para $a > 0, a \neq 1$ [47, 53, 54, 61, 66].
8. **Integrales trigonométricas básicas:** Ejemplos incluyen $\int \cos x dx = \sin x + C$ y $\int \sin x dx = -\cos x + C$ [47, 54, 61, 66-68].

Estas reglas garantizan que se puede encontrar la antiderivada para funciones que se ajustan a estas formas, siempre y cuando el integrando sea continuo [34, 69]. La constante C es crucial para representar la familia completa de antiderivadas [34, 69]. Para encontrar un valor específico de C y, por lo tanto, una única función primitiva, se necesita una **condición inicial** o un punto de partida conocido [34, 62].

1.5.2. Esquema de Pasos (Receta)

Un procedimiento sistemático para resolver integrales indefinidas es:

1. **Identificar el integrando:** Reconoce la función $f(x)$ que se va a integrar [33, 34, 55, 63, 69].
2. **Aplicar la(s) regla(s) de integración pertinente(s):** Piensa qué función, al ser derivada, produce el integrando. Usa las reglas inversas a la derivación [33, 34, 55, 69, 70].
3. **Añadir la constante de integración ($+C$):** Este paso es **fundamental** porque la derivada de cualquier constante es cero. Sin el $+C$, la solución sería incompleta y perdería la generalidad de la familia de antiderivadas [31, 33, 34, 55, 69, 70].
4. **Verificar (opcional, pero muy recomendado):** Deriva la solución obtenida ($F(x) + C$) y comprueba si coincide con el integrando original ($f(x)$) [26, 31, 34, 43, 51, 55, 61, 69, 71, 72].

1.5.3. Errores Comunes

- **Olvido de la constante de integración ($+C$):** El error más frecuente y grave, que resulta en una solución incompleta o incorrecta [26, 31, 43, 65, 71-75]. La solución obtenida es incompleta, presentando una solución particular en lugar de la general [26].
- **Errores algebraicos:** Fallos en la aplicación de las reglas de potencias, signos o simplificaciones [31, 65, 71, 72, 76].
- **Confusión entre reglas de derivación e integración:** Aplicar una regla de diferenciación cuando se debería integrar [31, 65, 71, 77].
- **Aplicación incorrecta de reglas:** Por ejemplo, usar la regla de la potencia para x^{-1} en lugar de $\ln|x|$, o no usar el valor absoluto en el logaritmo [31, 65, 71, 72].
- **No verificar la solución:** Una buena práctica es siempre derivar el resultado para comprobar la coincidencia con el integrando original [31, 65, 71].

1.6. Interpretación Geométrica y Económica

Geométricamente: La integral indefinida $F(x) + C$ representa una **familia infinita de curvas paralelas verticalmente** [78-81]. Todas tienen la misma forma, pero están desplazadas hacia arriba o hacia abajo [29, 78-81]. En cualquier punto x, la **pendiente de todas las curvas** de la familia $F(x) + C$ es la misma y es igual a $f(x)$ (el integrando) [78-81]. Visualmente, son copias verticalmente desplazadas de la función antiderivada [82].
Económicamente: La constante de integración (C) a menudo representa un **valor inicial o un nivel fijo** que no es afectado por los cambios marginales [8, 78, 83, 84].

- Al integrar el **Costo Marginal (CMg)** para obtener la función de **Costo Total (CT)**, C representa los **Costos Fijos (CF)** de la empresa [12, 26, 35, 41, 78, 83-85]. Los costos fijos son aquellos que no varían con el nivel de producción ($Q = 0$) [26, 84].
- En modelos de **acumulación de capital o población**, C representa el **stock inicial** (capital inicial, población inicial) en $t = 0$ [14, 39, 78, 83, 86].
- Si el Ingreso Marginal es cero para $Q = 0$, la constante de integración en la función de Ingreso Total será cero, reflejando que no hay ingreso sin ventas [83, 86, 87].

La constante C define el **nivel base** o el **punto de partida** de la función primitiva [13].

1.7. Casos y Variantes

Las integrales indefinidas simples se refieren a funciones de una sola variable [15, 88]. La çonstante de integración"(C) es la principal "variante"de la integral indefinida, ya que agrupa todas las posibles funciones primitivas [88]. En contextos más avanzados,

como las **ecuaciones diferenciales exactas**, la çonstante"de integración puede transformarse en una **función de las otras variables** [15, 88, 89]. En la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), pueden aparecer **soluciones singulares** que no se obtienen por la integración estándar, a menudo cuando se divide por expresiones que pueden ser cero [9, 15, 90].

1.8. Conexiones con Otros Temas y Errores Frecuentes

1.8.1. Puentes con otros temas del programa

- **Cálculo Diferencial:** Son operaciones **inversas directas**; una sin la otra carece de sentido pleno en el cálculo [15, 16, 26, 89, 91]. El **Teorema Fundamental del Cálculo** formaliza esta relación, mostrando que la derivación "deshace"la integración y viceversa, siendo uno de los "más grandes logros del intelecto humano"[26, 91-93].
- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO):** Las integrales indefinidas son la **base para resolver muchas EDO de primer orden**, especialmente las de variables separables [15, 16, 91, 94, 95].
- **Análisis Dinámico y Optimización Dinámica:** Permiten rastrear la trayectoria de variables económicas a lo largo del tiempo (como la acumulación de capital) y optimizar acumulaciones, por ejemplo, el valor presente de flujos de ingresos continuos [15, 55, 73, 89, 91].

1.8.2. Fallos Comunes y Detección

1. **Olvidar la constante de integración (+C):**
   - **Fallo:** La solución resultante es incompleta [31, 65, 71, 72, 74]. Se obtiene una solución particular en lugar de una familia de soluciones [26].
   - **Detección rápida:** Si la solución final no incluye -C"(a menos que haya una condición inicial específica que permita calcularla), la respuesta es incompleta o incorrecta en un contexto de integral indefinida [73, 74].
2. **Errores algebraicos o de cálculo:**
   - **Fallo:** Fallos en la aplicación de las reglas de potencias, signos, o en la simplificación [31, 65, 71, 72, 76].
   - **Detección rápida: Derivar el resultado final** y compararlo con la función original. Si no coinciden, hay un error [26, 31, 34, 55, 69, 71, 72, 90, 96].
3. **Confundir la integral indefinida con la definida:**
   - **Fallo:** La integral indefinida produce una **familia de funciones** (con +C), mientras que la integral definida (con límites de integración) produce un **valor numérico** (un área) [75, 96, 97].
   - **Detección rápida:** Revisar si la pregunta pide una familia de funciones o un valor numérico [96].

4. **Aplicar reglas de integración incorrectamente:** Por ejemplo, usar la regla de la cadena de la derivación al revés de forma equivocada, o la regla de la potencia para x^{-1} [31, 65, 71, 72].
    - **Detección rápida:** La misma estrategia de derivar el resultado. Si la derivada no coincide con el integrando original, la regla se aplicó mal [90, 98].
5. **Pérdida de soluciones singulares (en EDOs, no directamente en integrales):**
    - **Fallo:** Esto es más relevante en la resolución de EDOs separables (como $y' = y^2$), donde dividir por y^2 puede omitir la solución $y = 0$ [9, 15, 90, 98].
    - **Detección rápida:** Antes de dividir por cualquier término en el proceso de separación de variables, verificar si ese término puede ser cero y si ese valor de la variable satisface la ecuación diferencial original [76].

1.9. Práctica Esencial

Ejemplo Mecánico: Resuelva la siguiente integral indefinida: $\int(5x^4 - 3x^2 + 7)dx$.

$$\begin{aligned}\int(5x^4 - 3x^2 + 7)dx &= \int 5x^4dx - \int 3x^2dx + \int 7dx \\ &= 5\int x^4dx - 3\int x^2dx + 7\int 1dx \\ &= 5\left(\frac{x^{4+1}}{4+1}\right) - 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + 7x + C \\ &= 5\left(\frac{x^5}{5}\right) - 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 7x + C \\ &= \mathbf{x^5 - x^3 + 7x + C}\end{aligned}$$

Cada paso aplica la linealidad y la regla de la potencia para la integración, sumando 1 al exponente y dividiendo por el nuevo exponente [99]. Finalmente, se añade la constante de integración C [99].

Ejemplo Aplicado: Una empresa tiene una función de Costo Marginal ($CM(Q)$) dada por $CM(Q) = 4Q + 10$. Se sabe que sus costos fijos (cuando $Q = 0$) son de 200. Encuentre la función de Costo Total ($CT(Q)$) [99].

1. **Teoría:** El Costo Total es la integral indefinida del Costo Marginal [13, 26, 85, 100].
2. **Cálculo:**

$$\begin{aligned}CT(Q) &= \int CM(Q)dQ \\ &= \int(4Q + 10)dQ \\ &= 4\frac{Q^{1+1}}{1+1} + 10Q + C \\ &= 4\frac{Q^2}{2} + 10Q + C \\ &= 2Q^2 + 10Q + C\end{aligned}$$

3. **Condición Inicial e Interpretación:** Se nos da que los costos fijos son 200, lo que significa que $CT(0) = 200$ [100].

$$CT(0) = 2(0)^2 + 10(0) + C = 200$$
$$C = 200$$

4. **Resultado:** La función de Costo Total es $\mathbf{CT(Q) = 2Q^2 + 10Q + 200}$ [100]. La constante de integración $C = 200$ representa los **Costos Fijos (CF)** de la empresa [26, 35, 83, 84].

1.10. Síntesis y Ampliación

Las integrales indefinidas son la **operación inversa de la derivación**, cuyo propósito central es **reconstruir una función a partir de su tasa de cambio** [4, 101]. La notación es $\int f(x)dx = F(x) + C$, donde $F'(x) = f(x)$ [4, 102]. La **constante C es crucial** porque refleja la **familia infinita de funciones primitivas** y, en contextos económicos, representa valores como los costos fijos o el stock inicial [11, 102]. Una hipótesis fundamental para su existencia es que el integrando $f(x)$ debe ser **continuo** en el intervalo de interés [11, 102].
El dominio de las integrales indefinidas es la base para avanzar hacia:

- **Integrales Definidas:** A diferencia de las indefinidas, estas calculan un **valor numérico** (un área) bajo la curva en un intervalo específico [75, 96, 97, 103].
- **Técnicas de Integración Avanzadas:** Para funciones más complejas, se requieren métodos como la **integración por sustitución** (cambio de variable) [95, 104, 105] y la **integración por partes** [95, 104, 105].
- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO):** La resolución de EDO se basa fundamentalmente en la integración [15, 16, 91, 94, 95, 106].
- **Análisis Dinámico y Optimización:** Aplicaciones que van desde el modelado de crecimiento hasta la optimización de acumulaciones a lo largo del tiempo [15, 55, 73, 89, 91].

2. Red Conceptual Básica

- **Conceptos Principales:**
  - **Derivada:** Tasa de cambio instantánea de una función.
  - **Integral Indefinida (Antiderivada/Función Primitiva):** Operación inversa de la derivada. Familia de funciones cuya derivada es el integrando.
  - **Constante de Integración (C):** Valor arbitrario que representa la familia de soluciones y la información "perdida.[en] la derivación.
  - **Integrando ($f(x)$):** La función a integrar.
  - **Teorema Fundamental del Cálculo:** Conexión formal entre derivación e integración.

- **Condiciones Fundamentales:**
  - La función a integrar ($f(x)$) debe ser **continua** en el intervalo de interés para que su primitiva "simple.[ex]ista.
- **Relaciones entre Conceptos:**
  - La **integral indefinida "deshace"la derivada** (operación inversa).
  - La presencia de **C** es una consecuencia directa de que la derivada de cualquier constante es cero.
  - La integral indefinida es el **fundamento para la integral definida** (regla de Barrow).
  - La integral indefinida es la **base para resolver EDOs**.
- **Utilidades Principales:**
  - Reconstruir una función a partir de su tasa de cambio (ej., Costo Total de Costo Marginal).
  - Modelar acumulación (ej., stock de capital, población).
  - Resolver ecuaciones diferenciales.
- **Secuencia Paso a Paso de Comprensión y Cálculo:**
  1. Entender que es la operación inversa de la derivada.
  2. Aprender la notación y el significado de sus partes ($\int$, $f(x)$, dx, $F(x)$, C).
  3. Dominar las reglas básicas de integración (potencia, $1/x$, exponenciales, trigonométricas).
  4. Comprender el rol de la constante C (familia de curvas, valores iniciales en aplicaciones).
  5. Practicar el proceso: identificar, aplicar reglas, añadir C, y verificar derivando.

3. Conclusión Global

Las integrales indefinidas son un pilar esencial del cálculo, resolviendo el problema inverso de la derivación: reconstruir una función a partir de su tasa de cambio [1, 3, 4]. A diferencia de las derivadas, no producen una solución única, sino una **familia infinita de funciones primitivas** que se distinguen por una **constante de integración (C)** [18, 28, 38]. Esta constante, además de su significado geométrico como un desplazamiento vertical de la curva [78, 80], tiene una **interpretación económica vital**, representando a menudo costos fijos o valores iniciales [78, 83, 84]. Dominar las reglas de integración y comprender la función de C es fundamental para aplicar esta herramienta en campos como la física, la biología, la ingeniería y, crucialmente, la economía, donde permite pasar de conceptos marginales a totales [1, 8, 10]. La integral indefinida es la base para entender y resolver problemas de acumulación y ecuaciones diferenciales, siendo una de las ideas más poderosas en matemáticas [91, 95].

4. Preguntas Frecuentes (FAQs)

4.1. ¿Qué es una función primitiva o antiderivada de $f(x)$?

Una función primitiva o antiderivada $F(x)$ de una función dada $f(x)$ es aquella **cuya derivada es $f(x)$**, es decir, $F'(x) = f(x)$ [25-27, 29]. Es la operación inversa a la derivación [2, 26].

4.2. ¿Por qué la integral indefinida de una función $f(x)$ no es única?

La integral indefinida no es única porque la **derivada de cualquier constante es cero** [17, 26, 28, 32-36]. Esto implica que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(x) + C$ (donde C es cualquier constante real) también será una primitiva de $f(x)$ [17, 26-28].

4.3. ¿Qué representa el símbolo "dx."[en] la notación de la integral indefinida $\int f(x)dx$?

El símbolo "dx"se llama el **diferencial de la variable de integración** [17, 21, 23, 25, 26]. Indica **respecto a qué variable se está realizando la integración** [17, 23, 24, 26].

4.4. Menciona una condición fundamental para que la integral indefinida de una función $f(x)$ exista en un intervalo.

Una condición fundamental para que la integral indefinida de una función $f(x)$ exista en un intervalo es que la función $f(x)$ sea **continua en dicho intervalo** [11, 18, 26, 27, 42, 44, 45]. La continuidad asegura la "buena conducta"de la función para el proceso de acumulación [26].

4.5. En un contexto económico, si integramos la función de Costo Marginal, ¿qué obtenemos y qué representa la constante de integración?

Al integrar la función de Costo Marginal (CMg), obtenemos la función de **Costo Total (CT)** [12, 26, 83-85]. La constante de integración (C) en este contexto representa los **Costos Fijos (CF)** de la empresa, que son los costos que no varían con el nivel de producción [26, 35, 83-85].

LIMITES

@toobaziti

Disclaimer: Este documento ha sido elaborado a partir de la grabación de una clase, el slide visto en clase y el texto recomendados. Puede contener errores u omisiones asociados a la calidad del audio, cortes involuntarios o dificultades de transcripción. Por favor, consúltese siempre la fuente original de la grabación si se requiere confirmación de algún detalle.

Índice

1. Introducción y Contexto del Límite **1**

2. Definición Formal y Notación **1**

3. Tipos de Límites y su Interpretación **2**
- 3.1. Límite de una Función en un Punto (Finito) . . . 2
- 3.2. Límites Laterales . . . 2
- 3.3. Límites al Infinito . . . 2
- 3.4. Límites Infinitos . . . 3

4. Propiedades y Teoremas de Límites **3**

5. Formas Indeterminadas y Técnicas de Resolución **4**
- 5.1. Técnicas de Resolución para Indeterminaciones . . . 4

6. Continuidad y Diferenciabilidad **4**
- 6.1. Concepto de Continuidad . . . 4
- 6.2. Concepto de Diferenciabilidad . . . 5

7. Aplicaciones Económicas Específicas **5**
- 7.1. Relación Marginal de Sustitución (RMS) . . . 5
- 7.2. Crecimiento del Capital Per Cápita . . . 6

8. Herramientas Computacionales (GeoGebra) **6**

9. Red Conceptual Básica **6**

10. Conclusión Global **8**

11. Preguntas Frecuentes **8**

1. Introducción y Contexto del Límite

El **límite** es un concepto fundamental en el cálculo diferencial e integral, siendo la piedra angular que permite comprender el cambio, el movimiento y la aproximación en diversos fenómenos del mundo real [1-3]. Describe el comportamiento de una función a medida que su variable independiente se acerca a un determinado valor, sin necesidad de alcanzarlo [2, 4-8]. El enfoque no está en el valor exacto de la función en un punto, sino en la **tendencia o el valor al que se aproxima** cuando nos acercamos infinitamente a dicho punto [2, 8].

La importancia del límite radica en ser la **base conceptual** sobre la cual se erige todo el cálculo [1, 9-14]. Permite estudiar cantidades variables y fenómenos de la naturaleza y procesos tecnológicos [5, 15]. En **economía matemática**, es crucial para el **análisis dinámico**, ya que explora cómo las variables evolucionan en el tiempo y si tienden a un equilibrio [5, 16-19]. También facilita la comprensión de la convergencia de procesos económicos o la estabilidad de un sistema cuando se acerca a un estado estacionario en un horizonte infinito [16, 19].

Para comprender intuitivamente el límite, se pueden usar analogías como la de un vehículo que se acerca a una meta; el límite es el punto de llegada al que el vehículo **tiende** [20]. Otra analogía es la de un tren que se acerca a una estación; el límite es la posición de la estación, incluso si el tren se detiene un metro antes o llega tarde [5, 8, 21, 22]. Los prerrequisitos para su estudio incluyen el manejo de funciones, el sistema de números reales, desigualdades y valores absolutos [17, 23].

2. Definición Formal y Notación

La notación estándar para un límite es:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \tag{1}$$

Donde:

- lím: Es la abreviatura de "límite"[19, 24].
- $x \to c$: Indica que la variable independiente x se acerca o tiende al valor c [19, 24, 25]. Este valor puede ser un número real, o ∞ (infinito) o $-\infty$ (menos infinito) [5, 19, 24, 26].
- $f(x)$: Es la función que se está analizando [19, 24, 25].
- L: Es el valor al que se aproxima $f(x)$ [19, 24, 25]. Puede ser un número real, ∞ o $-\infty$ [19, 24].

La definición formal, conocida como el **criterio épsilon-delta (ε-δ)**, fue desarrollada por Bernard Bolzano y formalizada por Augustin-Louis Cauchy y Karl Weierstrass [27-29]. Establece que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \tag{2}$$

Esta definición garantiza la **precisión** del concepto de aproximación [21, 30-32]. Intuitivamente, ε mide qué tan cerca queremos que esté $f(x)$ de L, mientras que δ mide qué

tan cerca debemos tomar x de c para lograr esa proximidad deseada [21, 30, 32]. Esto significa que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén **arbitrariamente cerca** de L si tomamos valores de x suficientemente cerca de c, pero no necesariamente iguales a c [21].

3. Tipos de Límites y su Interpretación

El estudio de límites implica comprender cómo la función se comporta cuando la variable se aproxima a un valor, ya sea finito o infinito, y si el resultado de la función también es finito o infinito [32, 33].

3.1. Límite de una Función en un Punto (Finito)

Este es el caso general $\lim_{x \to c} f(x) = L$ [34, 35]. Significa que a medida que x se acerca a c (por la izquierda o por la derecha), $f(x)$ se acerca a L [34]. Para funciones "bien portadas", como los polinomios o las funciones racionales sin problemas en el denominador en c, el límite a menudo se puede encontrar simplemente **sustituyendo directamente** c en la función [34-37].

3.2. Límites Laterales

Es crucial analizar el comportamiento de la función al acercarse al punto c desde la **izquierda** ($x \to c^-$) y desde la **derecha** ($x \to c^+$) [25, 34, 35, 37-40].

- $\lim_{x \to c^-} f(x)$: Límite cuando x se acerca a c por valores menores que c [41].
- $\lim_{x \to c^+} f(x)$: Límite cuando x se acerca a c por valores mayores que c [41].

Un límite existe si y solo si los límites laterales existen y son iguales [35, 37, 39-42]. Si son diferentes o uno no existe, el límite en el punto no existe [35, 37, 41]. Gráficamente, esto se ve como un "**salto**.[en] la función [41]. Por ejemplo, en una función de precios por tramos para revelado de fotografía, la función es **discontinua** en 100 y 200 fotos porque los límites laterales no coinciden en esos puntos [37, 43-48].

3.3. Límites al Infinito

Se refieren al comportamiento de la función cuando la variable independiente x crece o decrece sin límite (tiende a ∞ o a $-\infty$) [35, 40, 41, 49-51].

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$: La función se acerca a un valor constante L a medida que x se hace muy grande [52]. Gráficamente, esto implica una **asíntota horizontal** en $y = L$ [35, 40, 49, 52-54].

Aplicaciones Económicas Clave:

- **Costo Promedio**: El costo promedio de producción tiende a **estabilizarse** (converge a un límite) cuando la producción aumenta indefinidamente, revelando **economías de escala** [35, 49, 55-60]. Por ejemplo, el costo promedio de producción se estabiliza en 300, lo que significa que el costo por unidad tiende a 300 a medida que la producción es muy grande [35, 61, 62].

- **Capital y Rentabilidad a Largo Plazo**: El capital invertido en un banco puede **estabilizarse** en un monto máximo [49, 57-60, 63-65]. Si $C(t) = 5^6 \left(1 + 4e^{-2t}\right)^{-1}$ es la función de capital, $\lim_{t\to\infty} C(t) = 15625$ euros, indicando que el capital se estabiliza en 15625 euros y no aumentará más allá de ese valor [60, 63].

- **Depreciación de Activos**: El valor de un activo tiende a cero a largo plazo, indicando una depreciación total [35, 49, 59, 60, 66]. Por ejemplo, una excavadora con un precio $P(t) = \frac{80}{1+0,4t}$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$, lo que significa que a largo plazo perderá todo su valor [35, 66].

- **Precio a Largo Plazo**: El precio de un artículo se estima que se estabiliza a un valor específico con el paso del tiempo [49, 58-60]. Si $P(t) = \frac{5t+8}{t+1}$ es la función de precio, $\lim_{t\to\infty} P(t) = 5$ (miles de pesos), estimando que el precio se estabilizará en cinco mil pesos a largo plazo [57, 60].

- **Costo Unitario Medio**: El costo por unidad de un producto (como un ratón inalámbrico) tiende a un valor constante si la producción aumenta indefinidamente [49, 60, 67, 68]. Para $C_m(p) = \frac{10p+100000}{p}$, $\lim_{p\to\infty} C_m(p) = 10$, lo que significa que el costo será de 10 euros por unidad si se produce indefinidamente [60, 68].

3.4. Límites Infinitos

Esto ocurre cuando la función $f(x)$ crece o decrece sin límite (tiende a ∞ o a $-\infty$) a medida que x se acerca a un punto c [35, 40, 49, 52, 69].

- $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ (o $-\infty$): La función se dispara hacia arriba o hacia abajo, indicando una **asíntota vertical** en $x = c$ [35, 40, 49, 52-54, 70].

Aplicación Económica: La cuota individual de un club cultural aumenta indefinidamente si el número de socios tiende a cero [35, 55, 71-73]. Si la cuota es $C(x) = \frac{1800}{x}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1800}{x} = \infty$, indicando que la cuota es mayor cuanto menos socios hay [35, 72, 74].

4. Propiedades y Teoremas de Límites

Las propiedades de los límites permiten calcular límites de funciones complejas a partir de límites de funciones más simples [75, 76]. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M$, entonces [30, 75, 76]:

- **Suma/Resta**: $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$ [30, 75, 76].

- **Producto**: $\lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$ [20, 75, 76].

- **Cociente**: $\lim_{x\to c}[f(x)/g(x)] = L/M$, siempre que $M \neq 0$ [20, 75, 76].

- **Múltiplo escalar**: $\lim_{x\to c}[k \cdot f(x)] = k \cdot L$, donde k es una constante [75, 76].

- **Potencia**: $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$, si L^n está definido [20, 76, 77].

Estos teoremas garantizan que, si los límites individuales existen, el límite de la operación combinada también existirá y podrá ser calculado directamente [78]. La principal limitación es que **no se puede dividir por cero** [78]. Otros teoremas importantes incluyen el **Teorema del Sándwich (o de la Compresión)**, útil para encontrar el límite de una función comparándola con otras dos funciones cuyos límites se conocen [79, 80].

5. Formas Indeterminadas y Técnicas de Resolución

En ocasiones, la sustitución directa del valor al que x tiende nos lleva a **formas indeterminadas** [39, 77, 80-83]. Estas son expresiones que no dan información directa sobre el límite al sustituir [77, 83]. No significan que el límite no exista, sino que necesitamos aplicar técnicas adicionales para encontrar el límite real si existe [77, 83]. Las formas indeterminadas comunes incluyen: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 [39, 77, 80, 81, 83]. Siempre se debe **verificar el denominador** para identificar si hay una indeterminación [84].

5.1. Técnicas de Resolución para Indeterminaciones

- **Factorización**: Para indeterminaciones tipo $\frac{0}{0}$ en funciones racionales [77, 81, 85-87]. Se factoriza el numerador y/o denominador para simplificar términos que causan la indeterminación [85].
- **División por la Mayor Potencia**: Para indeterminaciones tipo $\frac{\infty}{\infty}$ en funciones racionales, especialmente en límites al infinito [77, 81, 87, 88]. Se dividen todos los términos del numerador y del denominador por la mayor potencia de x presente [88].
- **Regla de L'Hôpital**: Es una herramienta avanzada para resolver indeterminaciones $0/0$ o ∞/∞ [77, 79, 80, 87]. Se aplica **derivando el numerador y el denominador** de la función [79, 87]. Es muy útil para economistas que trabajan con tasas de cambio [79, 87].

Los **errores comunes** incluyen ignorar la división por cero o las indeterminaciones, así como cometer errores algebraicos al simplificar expresiones [84, 89-91].

6. Continuidad y Diferenciabilidad

El concepto de límite es fundamental para definir la continuidad y la diferenciabilidad de una función [16, 48, 92].

6.1. Concepto de Continuidad

Una función $f(x)$ es **continua** en un punto x_0 si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz [48, 92]. Para que una función sea continua en un punto, se deben cumplir tres condiciones [48, 92]:

1. La función está **definida** en el punto ($f(x_0)$ existe) [48, 92].

2. El **límite de la función existe** en ese punto ($\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, es decir, los límites laterales son iguales) [48, 92].

3. El **valor del límite es igual al valor de la función** en el punto ($\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$) [48, 92].

La continuidad es vital para modelar fenómenos económicos y físicos que no presentan **saltos abruptos** [16, 92]. Las **discontinuidades** ocurren cuando el límite no existe (límites laterales distintos), cuando el valor de la función en el punto no coincide con el límite, o cuando la función no está definida en el punto [48, 69, 92]. Por ejemplo, en una función de precios por tramos, como la del revelado fotográfico, la función es discontinua en los puntos donde los límites laterales no coinciden (ej. en 100 y 200 fotos), evidenciando un çorte.$^{\text{en}}$ la gráfica [43-48, 92].

6.2. Concepto de Diferenciabilidad

La **derivada** de una función ($f'(x)$) se define formalmente como el **límite de un cociente de diferencias** cuando el cambio en la variable independiente tiende a cero [9, 48, 59, 70, 93, 94]:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

La derivada mide la **tasa de cambio instantánea** de una función y representa la **pendiente de la recta tangente** a la curva en un punto [9, 93]. La **continuidad es una condición necesaria** para la diferenciabilidad, pero no suficiente [48, 70, 93]. Una función puede ser continua pero no diferenciable si tiene "picos.$^{\text{o}}$.$^{\text{es}}$quinas"[48, 93]. Sus aplicaciones económicas incluyen el cálculo de la elasticidad de la demanda, el **costo marginal** o el **ingreso marginal** [9, 93].

7. Aplicaciones Económicas Específicas

Los límites son ampliamente aplicados en la economía matemática para analizar comportamientos a largo plazo y marginales [5, 16, 17, 19, 59, 60, 95].

7.1. Relación Marginal de Sustitución (RMS)

La RMS es la **máxima cantidad de un bien 'Y' que un consumidor está dispuesto a ceder para obtener una unidad adicional del bien 'X'**, manteniendo su utilidad constante [49, 96-98]. Es la **pendiente de la curva de indiferencia** en un punto [49, 98]. Su cálculo, como cociente de las utilidades marginales ($\text{RMS}_{xy} = \frac{UMg_x}{UMg_y}$), **conceptualmente implica un límite** al considerar cambios infinitesimales [99-101].

$$RMS_{xy} = -\frac{dy}{dx} = \frac{UMg_x}{UMg_y} \tag{4}$$

La RMS **refleja el costo de oportunidad** en términos de mercado y ayuda a entender cómo los consumidores ajustan su comportamiento ante cambios de precios [102, 103].

7.2. Crecimiento del Capital Per Cápita

En modelos de crecimiento económico como el de Solow, el **capital per cápita** ($k(t)$) tiende a un **estado estacionario** (k^*) a largo plazo [104, 105]. Esto significa que $\lim_{t\to\infty} k(t) = k^*$ [105]. Este k^* se alcanza cuando la inversión bruta es igual a la inversión necesaria para reponer el capital depreciado y equipar a los nuevos trabajadores [106].

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{5}$$

Donde s es la tasa de ahorro, δ es la tasa de depreciación, n es la tasa de crecimiento poblacional y α es un parámetro de la función de producción [104]. Este límite representa el **equilibrio de largo plazo** hacia el cual la economía converge [106].

8. Herramientas Computacionales (GeoGebra)

El uso de software como GeoGebra es fundamental para la **visualización y el cálculo** de límites [1, 49, 79, 107-109]. Permite:

- **Visualización gráfica** de funciones y límites, mostrando asíntotas horizontales y verticales [49, 58, 109-114].
- **Cálculo directo** de límites y asíntotas con comandos específicos como 'Límite()' y 'Asíntota()' [49, 109, 115-117].
- Creación de **tablas de valores** para observar tendencias numéricas de una función a medida que la variable se acerca a un punto o al infinito [49, 109, 118-122].
- **Análisis de la continuidad** de funciones por tramos [92, 109, 123].

GeoGebra ayuda a **dilucidar dudas** y proporciona una **interpretación visual** de los resultados matemáticos, lo que es crucial para la toma de mejores decisiones en un contexto económico [109, 124, 125].

9. Red Conceptual Básica

- **Conceptos Principales del Límite**
  - **Límite**: Valor al que una función se aproxima.
  - **Límites Laterales**: Aproximación por izquierda o derecha.
  - **Límites al Infinito**: Comportamiento a largo plazo ($x \to \pm\infty$).
  - **Límites Infinitos**: Comportamiento de la función que tiende a $\pm\infty$ ($f(x) \to \pm\infty$).
  - **Formas Indeterminadas**: Expresiones que requieren técnicas especiales para resolver el límite (ej., $0/0$, ∞/∞).
  - **Continuidad**: Propiedad de una función donde el límite en un punto coincide con su valor en ese punto.
  - **Derivada**: Tasa de cambio instantánea, definida como un límite.

- **Asíntota**: Línea a la que una curva se aproxima (vertical u horizontal).

- **Axiomas o Postulados**
  - **Definición Épsilon-Delta (ε-δ)**: Rigurosa definición formal que establece la existencia de un límite.

- **Relaciones entre Conceptos**
  - **Límites y Continuidad**: Un límite existe si los límites laterales son iguales; una función es continua si su límite existe y coincide con el valor de la función.
  - **Límites y Derivación**: La derivada es la aplicación de un límite a un cociente de diferencias.
  - **Límites y Asíntotas**: Los límites al infinito definen asíntotas horizontales; los límites infinitos definen asíntotas verticales.
  - **Límites y Formas Indeterminadas**: El límite permite resolver estas expresiones mediante técnicas algebraicas o de cálculo.

- **Utilidades Principales**
  - **Análisis de Tendencias**: Comprender hacia dónde se dirige una variable.
  - **Comportamiento a Largo Plazo**: Evaluar la evolución de sistemas económicos a lo largo del tiempo (ej., equilibrio, depreciación, rentabilidad).
  - **Tasas de Cambio Marginales**: Cuantificar cómo una variable responde a cambios infinitesimales en otra (ej., costo marginal, RMS).
  - **Estabilidad de Sistemas**: Determinar si un modelo dinámico converge a un equilibrio.

- **Secuencia Paso a Paso de Comprensión del Tema**
  1. **Intuición del Límite**: Comprender la idea de .ªproximaciónz "tendencia".
  2. **Definición Formal**: Entender la precisión del ε-δ.
  3. **Tipos de Límites**: Identificar límites en un punto, laterales, al infinito e infinitos.
  4. **Propiedades de Límites**: Aprender las reglas para operar con límites.
  5. **Resolución de Indeterminaciones**: Dominar técnicas como factorización, división por mayor potencia, y L'Hôpital.
  6. **Conexión con Continuidad y Derivación**: Ver cómo el límite es la base de estos conceptos.
  7. **Aplicaciones Económicas**: Traducir problemas económicos a lenguaje de límites e interpretar resultados.
  8. **Visualización con Herramientas**: Usar software para reforzar la comprensión gráfica y numérica.

10. Conclusión Global

El concepto de **límite** es fundamental, no solo como una herramienta matemática esencial, sino como una **forma de entender el comportamiento de los sistemas** cuando se aproximan a un punto o condición extrema [10, 14, 126]. Es la **base conceptual del cálculo**, permitiendo definir la **derivada** (tasa de cambio instantánea) y la **integral** (acumulación total) [10, 14]. Su relevancia se extiende a la **economía matemática**, donde ayuda a analizar la estabilidad de los equilibrios, las trayectorias dinámicas de variables y el comportamiento a largo plazo de los sistemas económicos [10, 14]. Dominar los límites no solo dota de rigor analítico, sino que agudiza la intuición sobre cómo el mundo evoluciona y converge, transformando problemas complejos en modelos comprensibles y predecibles [10, 127].

11. Preguntas Frecuentes

1. ¿Qué representa el concepto de límite en matemáticas y por qué es importante para el cálculo diferencial e integral?

El límite representa la **tendencia de una función** cuando su variable se aproxima a un valor específico, sin necesariamente alcanzarlo [7, 128]. Es fundamental porque es la **base** para definir la continuidad y la derivada, pilares del cálculo diferencial e integral [13, 128].

2. Explique la importancia de los límites laterales en la determinación de la existencia de un límite en un punto.

Los límites laterales (por la izquierda y por la derecha) **deben ser iguales y finitos** para que el límite de una función exista en un punto dado [41, 128]. Si difieren o son infinitos, la función no tiene un límite único en ese punto, y se considera **discontinua** [41, 128].

3. ¿Cuál es la interpretación económica de un límite de costo promedio cuando la producción tiende a infinito?

Un límite de costo promedio que tiende a un valor finito cuando la producción tiende a infinito sugiere que la empresa experimenta **economías de escala** [55, 128]. Esto significa que, a una producción muy alta, el costo unitario de cada bien adicional se **estabiliza** en un determinado nivel, haciéndose más eficiente [55, 128].

4. ¿Por qué es crucial la regla de L'Hôpital para los economistas que trabajan con modelos matemáticos?

La regla de L'Hôpital es crucial porque permite **resolver indeterminaciones comunes** ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$) en modelos económicos que involucran **tasas de cambio** o relaciones entre variables [79, 87, 128]. Esto facilita el análisis de comportamientos marginales o de equilibrio, que son fundamentales en economía [79, 128].

5. Explique qué representa la Relación Marginal de Sustitución (RMS) en economía y su conexión conceptual con los límites.

La Relación Marginal de Sustitución (RMS) es la **cantidad de un bien 'Y' que un consumidor está dispuesto a sacrificar para obtener una unidad adicional del bien 'X'**, manteniendo su utilidad constante [97, 128]. Se conecta a los límites al ser la **pendiente de la curva de indiferencia** en un punto, que se calcula a través de cambios infinitesimales (derivadas), las cuales son definidas formalmente mediante límites [98, 100, 101, 128].

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

@toobaziti

Disclaimer: Este documento ha sido elaborado a partir de la grabación de una clase, el slide visto en clase y el texto recomendados. Puede contener errores u omisiones asociados a la calidad del audio, cortes involuntarios o dificultades de transcripción. Por favor, consúltese siempre la fuente original de la grabación si se requiere confirmación de algún detalle.

Índice

1. Introducción: Definición y Contexto **1**

2. Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales **2**
2.1. Tipos de Sistemas según sus Soluciones 2
2.1.1. Sistema Compatible Determinado (SCD) 2
2.1.2. Sistema Compatible Indeterminado (SCI) 2
2.1.3. Sistema Incompatible (SI) 3
2.2. Sistemas Homogéneos 3

3. Métodos de Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales **4**
3.1. Método de Gauss / Gauss-Jordan 4
3.2. Regla de Cramer 5
3.3. Método de la Matriz Inversa 5

4. Interpretación Geométrica y Económica **6**

5. Red Conceptual Básica **7**

6. Conclusión Global **9**

7. Preguntas Frecuentes (FAQs) **9**

1. Introducción: Definición y Contexto

Los **sistemas de ecuaciones lineales** son una herramienta matemática fundamental para modelar y resolver problemas donde múltiples variables interrelacionadas buscan un estado de equilibrio o valores que satisfagan simultáneamente un conjunto de condiciones [1-6]. En su esencia, un sistema de ecuaciones lineales es un **conjunto de una o más ecuaciones lineales** que comparten las mismas incógnitas [4, 7]. Una **ecuación lineal** es aquella en la que las variables aparecen elevadas únicamente a la primera potencia y no se multiplican entre sí [2, 4-9].

Contexto y Aplicaciones

La utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales se extiende a numerosos campos [1, 10]. En la **economía**, son esenciales para el análisis estático o de equilibrio, permitiendo determinar valores para variables interrelacionadas que no tienen una tendencia inherente a cambiar [3, 10-13]. Por ejemplo, se usan en:

- **Modelos de equilibrio de mercado**: Para determinar precios (P^*) y cantidades (Q^*) donde la demanda iguala a la oferta ($Q_d = Q_s$) [10, 12-17].
- **Modelos de ingreso nacional**: Para calcular niveles de ingreso (Y) y consumo (C) de equilibrio [10, 14, 18].
- **Análisis de insumo-producto (Modelo de Leontief)**: Para describir interrelaciones entre sectores económicos y satisfacer la demanda final [5, 6, 10, 14, 18-20].

Más allá de la economía, se aplican en ingeniería (análisis de circuitos eléctricos, estructuras), química (balanceo de reacciones) y ciencias sociales (análisis de redes) [1, 10].

Representación Matricial

Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas puede expresarse de forma compacta y eficiente mediante la **notación matricial** como $Ax = b$ [8, 19-24].

$$Ax = b \tag{1}$$

Donde:

- A: Es la **matriz de coeficientes**, que contiene los coeficientes numéricos de las incógnitas [7, 8, 22, 25, 26]. Es de dimensión $m \times n$ [26].
- x: Es el **vector columna de incógnitas** (variables desconocidas del sistema) [7, 8, 22, 27, 28].
- b: Es el **vector columna de términos independientes** (valores constantes de cada ecuación) [7, 8, 22, 27, 28]. A veces se le denota como d [29].

La **matriz ampliada** (A^* o $A|b$) se forma al añadir el vector de términos independientes b a la matriz de coeficientes A como una columna adicional [7, 27, 30].

2. Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican según el **número de soluciones** que poseen [24, 31-35]. Esta clasificación es fundamental y se basa en el **Teorema de Rouché-Fröbenius** (o Rouché-Capelli) [7, 8, 21, 24, 34, 36-41]. Este teorema es una herramienta crucial que permite **determinar si un sistema tiene solución y cuántas, sin necesidad de resolverlo explícitamente** [8, 37]. Se fundamenta en la comparación del **rango de la matriz de coeficientes** ($Rang(A)$) y el **rango de la matriz ampliada** ($Rang(A^*)$) con el número de incógnitas (n) [7, 8, 24, 36, 37, 42]. El **rango de una matriz** es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes en ella [7, 30].

2.1. Tipos de Sistemas según sus Soluciones

Existen tres tipos principales de sistemas de ecuaciones lineales:

2.1.1. Sistema Compatible Determinado (SCD)

Definición: Un SCD tiene una **única solución** [7, 8, 31, 34, 35, 43-47]. **Condición por Rouché-Fröbenius**: El sistema es SCD si y solo si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada y, además, es igual al número de incógnitas [7, 34, 36, 37, 46, 48].

$$\textbf{Rang(A)} = \textbf{Rang(A*)} = \textbf{n.º incógnitas} \text{ [7, 34, 36, 46, 48]} \tag{2}$$

Intuición Geométrica:

- **En 2D**: Las dos líneas rectas que representan las ecuaciones se **intersecan en un único punto** [34, 45, 49-55]. Este punto es la solución del sistema.
- **En 3D**: Los tres planos se **cruzan en un único punto** [34, 49, 50, 52].

Ideas Clave:

- Proporciona una solución precisa.
- La matriz de coeficientes es cuadrada y no singular (su determinante es distinto de cero) [44].
- Implica que las ecuaciones son linealmente independientes y consistentes.

2.1.2. Sistema Compatible Indeterminado (SCI)

Definición: Un SCI posee **infinitas soluciones**, las cuales **dependen de uno o varios parámetros** [7, 8, 31, 34, 35, 43, 45, 46, 56]. **Condición por Rouché-Fröbenius**: El sistema es SCI si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada pero **menor que el número de incógnitas** [7, 34, 36, 37, 46, 57].

$$\textbf{Rang(A)} = \textbf{Rang(A*)} < \textbf{n.º incógnitas} \text{ [7, 34, 46, 57, 58]} \tag{3}$$

Intuición Geométrica:

- **En 2D**: Las dos líneas son **coincidentes** (representan la misma línea). Cualquier punto sobre esa línea es una solución [34, 45, 49-53, 56].
- **En 3D**: Los planos se intersecan **a lo largo de una línea** común o son el mismo plano [34, 49, 50, 52].

Ideas Clave:

- La presencia de parámetros indica **variables libres** que pueden tomar cualquier valor real [30].
- Las ecuaciones son **linealmente dependientes** pero consistentes [59, 60].
- El número de parámetros es la diferencia entre el número de incógnitas y el número de filas no nulas (o el rango) [61, 62].

2.1.3. Sistema Incompatible (SI)

Definición: Un SI **no tiene ninguna solución** [7, 8, 31, 34, 35, 43, 46, 60, 63, 64]. También se le llama **sistema inconsistente** [46, 64]. **Condición por Rouché-Fröbenius**: El sistema es SI si los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada **son distintos** [7, 37, 46, 48, 58].

$$\textbf{Rang(A)} < \textbf{Rang(A*)} \text{ [7, 37, 46, 48, 58]} \tag{4}$$

Intuición Geométrica:

- **En 2D**: Las dos líneas son **paralelas y distintas**. Nunca se intersecan [34, 49-53, 63, 64].
- **En 3D**: Los planos **no tienen una intersección común** (pueden cortarse por pares, pero no en un punto común a los tres) [34, 49, 50, 52]. Esto puede ocurrir, por ejemplo, si al aplicar Gauss se obtiene una fila con ceros en los coeficientes y un término independiente distinto de cero (ej., $0 = 5$) [65-67].

Ideas Clave:

- Las ecuaciones son **inconsistentes** entre sí [8, 60].
- No hay ningún conjunto de valores que las satisfaga simultáneamente [8].
- La falta de solución se detecta si, por ejemplo, dos filas de A son proporcionales pero sus términos independientes no lo son [68, 69].

2.2. Sistemas Homogéneos

Un **sistema de ecuaciones homogéneo** es un caso especial donde **todos sus términos independientes son cero** [7, 8, 32, 58, 70-74]. Su representación matricial es $Ax = 0$ [71, 73].
Propiedades Clave:

- **Siempre son compatibles**: Los sistemas homogéneos **siempre tienen solución** [70, 71, 74-76]. Esto se debe a que el rango de la matriz de coeficientes ($Rang(A)$) siempre será igual al rango de la matriz ampliada ($Rang(A^*)$), ya que la matriz ampliada solo añade una columna de ceros, lo que no altera el rango [71, 74-76]. Es decir, $Rang(A) = Rang(A^*)$ siempre se cumple para sistemas homogéneos [76].
- **Siempre tienen la solución trivial**: La **solución trivial** es aquella donde **todas las incógnitas son iguales a cero** ($x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$) [7, 70, 73-78]. Al sustituir cero en todas las incógnitas, cada ecuación se convierte en $0 = 0$, lo cual siempre es una solución válida [8, 74, 76, 78].

Clasificación de Sistemas Homogéneos:

- Si **Rang(A) = n.º incógnitas**: El sistema es **Compatible Determinado (SCD)** y su **única solución es la trivial** [70, 74, 78]. Por ejemplo, $(0, 0, 0)$ [75].
- Si **Rang(A) <n.º incógnitas**: El sistema es **Compatible Indeterminado (SCI)** y tiene **infinitas soluciones**, **incluyendo la trivial** [73, 74, 78, 79]. El número de parámetros en la solución es la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de A [74, 76].

Análisis crítico: Para sistemas homogéneos, un truco es calcular el determinante de la matriz de coeficientes ($|A|$). Si $|A| \neq 0$, el rango es igual al número de incógnitas, y por lo tanto, la única solución es la trivial (SCD) [80]. Si $|A| = 0$, el sistema es SCI y tendrá infinitas soluciones, incluyendo la trivial [73, 80].

3. Métodos de Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Una vez que un sistema ha sido clasificado como compatible (SCD o SCI), se procede a encontrar sus soluciones. Existen varios métodos sistemáticos, cada uno con sus propias ventajas, supuestos y limitaciones [67, 81-83].

3.1. Método de Gauss / Gauss-Jordan

El método de Gauss (o Gauss-Jordan) es un enfoque **versátil y universalmente aplicable** para resolver sistemas de ecuaciones lineales [8, 38, 39, 67, 81-84]. Consiste en transformar la **matriz ampliada** del sistema en una forma **escalonada** (o escalonada reducida en el caso de Gauss-Jordan) mediante **operaciones elementales por filas** [65, 67, 82, 84].
Esquema de Pasos (Ejemplo intuitivo): 1. **Transformar a matriz ampliada**: Escribir el sistema en su forma matricial $A|b$ [84]. 2. **Hacer ceros debajo de la diagonal principal**: Mediante combinaciones lineales de filas (ej., $F_2 \to F_2 - 2F_1$) [77, 84].

- Si en este proceso se obtiene una fila con ceros en los coeficientes pero un término independiente distinto de cero (ej., [0 0 0|5]), el sistema es **Incompatible (SI)** [65-67].

3. **Resolver de forma escalonada**: Una vez escalonado, si el sistema es compatible:

- Si el **número de filas no nulas coincide con el número de incógnitas**, el sistema es **SCD** y tiene una única solución. Se resuelve de abajo hacia arriba [61, 67, 85].
- Si el **número de filas no nulas es menor que el número de incógnitas**, el sistema es **SCI** y tiene infinitas soluciones. La diferencia entre el número de incógnitas y el número de filas no nulas determina el número de parámetros [61, 67, 82, 85].

Ventajas: Es robusto, aplicable a cualquier sistema lineal (cuadrado o no, singular o no), y útil tanto para la clasificación como para la resolución, especialmente en sistemas grandes [67, 82].

3.2. Regla de Cramer

La Regla de Cramer es un método que utiliza **determinantes** para calcular el valor de cada incógnita en un sistema [8, 38, 39, 67, 81-83, 86].
Condiciones de Aplicabilidad:

- El sistema debe ser **cuadrado** (mismo número de ecuaciones que de incógnitas) [8, 67, 82].
- La **matriz de coeficientes (A) debe ser no singular**, es decir, su **determinante ($|A|$) debe ser distinto de cero** ($|A| \neq 0$) [8, 29, 38, 39, 44, 67, 81, 82, 86-91]. Si $|A| = 0$, este método no es aplicable [8, 66, 89, 92, 93].

Fórmula General: Para un sistema $Ax = b$, si $|A| \neq 0$, la solución para cada variable x_j es:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \text{ [67, 82, 83, 94]} \tag{5}$$

Donde:

- $|A|$ es el determinante de la matriz de coeficientes A [82].
- $|A_j|$ es el determinante de la matriz que se obtiene al **reemplazar la columna j de A por el vector de términos independientes b** [67, 82, 86, 94, 95].

Ventajas: Proporciona una **expresión analítica explícita** para la solución de cada variable, lo cual es muy útil para el análisis comparativo estático en economía [67, 87].
Limitaciones: Puede ser **ineficaz para sistemas muy grandes** debido a la cantidad de determinantes a calcular [67, 87].

3.3. Método de la Matriz Inversa

Si la matriz de coeficientes A es cuadrada y no singular (es decir, invertible, A^{-1} existe), la solución del sistema $Ax = b$ puede obtenerse mediante la multiplicación de matrices [29, 38, 39, 57, 67, 82].
Condiciones de Aplicabilidad:

- La matriz de coeficientes A debe ser **cuadrada** [29, 57, 67, 82].

- La matriz A debe ser **no singular** (invertible), lo que implica que su **determinante ($|A|$) debe ser distinto de cero** ($|A| \neq 0$) [29, 57, 67, 82, 89]. Si $|A| = 0$, no tiene inversa y el método no es aplicable [8, 66, 89, 92].

Fórmula de Solución: Dado el sistema $Ax = b$, la solución x se obtiene como:

$$x = A^{-1}b \text{ [29, 38, 39, 67, 82, 96]} \tag{6}$$

Donde A^{-1} es la matriz inversa de A.
Esquema de Pasos (generales para A^{-1}): 1. **Calcular el determinante de** A: Verificar que $|A| \neq 0$ [29, 97]. 2. **Calcular la matriz adjunta de** A: Implica encontrar la matriz de cofactores y luego transponerla [97]. 3. **Calcular la inversa** A^{-1}: Usando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)$ [97]. 4. **Multiplicar** A^{-1} **por el vector** b: $x = A^{-1}b$ [97].
Ventajas: Ofrece una solución única de forma compacta y analítica [29, 67]. **Limitaciones**: El cálculo de la inversa puede ser **computacionalmente intensivo** para matrices grandes [29, 67, 82].

Errores Comunes al Resolver Sistemas

Al trabajar con sistemas de ecuaciones lineales, es crucial evitar ciertos errores que pueden llevar a resultados incorrectos o a la imposibilidad de resolver el sistema [8, 89, 98]. Los más frecuentes incluyen:

- **No verificar la singularidad de la matriz**: Intentar aplicar Cramer o el método de la inversa sin antes calcular y verificar que el determinante de A sea distinto de cero [8, 66, 89, 92, 93]. Un determinante nulo ('$|A| = 0$') significa que la matriz es singular y no invertible, haciendo estos métodos inaplicables y conduciendo a divisiones por cero [8, 66, 89, 92].
- **Errores algebraicos en los cálculos**: Fallos en operaciones básicas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones) o en el cálculo de determinantes (especialmente en matrices 3×3 o superiores, o signos de cofactores) [8, 51, 66, 88, 89, 92].
- **Confundir dependencia lineal con inconsistencia**: Una matriz con determinante cero implica dependencia lineal de las ecuaciones, pero no necesariamente que no haya solución. Podría haber infinitas soluciones (SCI) en lugar de ninguna (SI) [60, 66, 93].

4. Interpretación Geométrica y Económica

La **interpretación geométrica** de los sistemas de ecuaciones lineales es fundamental para visualizar su comportamiento y las posibles soluciones en diferentes dimensiones [50-52].

Interpretación Geométrica

- **En 2D (dos ecuaciones con dos incógnitas)**: Cada ecuación representa una **línea recta** en el plano cartesiano [49-52].

    - **SCD**: Las dos líneas se **intersecan en un único punto** (la solución del sistema) [49-52, 54, 55].
    - **SCI**: Las dos líneas son **coincidentes** (la misma línea); cualquier punto sobre esa línea es una solución [49-52, 56].
    - **SI**: Las dos líneas son **paralelas y distintas**; nunca se intersecan, lo que significa que no hay solución [49-52, 64].
- **En 3D (tres ecuaciones con tres incógnitas)**: Cada ecuación representa un **plano** en el espacio tridimensional [12, 49, 50, 52].
    - **SCD**: Los tres planos se **intersecan en un único punto** [49, 50, 52].
    - **SCI**: Los planos se intersecan **a lo largo de una línea** común, o los tres planos son el mismo plano [49, 50, 52].
    - **SI**: Los planos **no tienen una intersección común** [49, 50, 52].

Esta visualización ayuda a comprender intuitivamente cómo las ecuaciones imponen restricciones geométricas y cómo las soluciones corresponden a las intersecciones compartidas [11, 49].

Interpretación Económica

La interpretación geométrica se traduce directamente a modelos económicos [12, 13]:

- **Equilibrio de mercado**: El punto donde las funciones de demanda y oferta se intersecan representa el **precio y la cantidad de equilibrio** [12-14]. Por ejemplo, para $Q_d = a - bP$ y $Q_s = c + dP$, el equilibrio ($Q_d = Q_s$) se halla resolviendo el sistema lineal [12].
- **Generalidad de las soluciones**: Cuando se utilizan funciones paramétricas (con letras para coeficientes), las soluciones de equilibrio también son en términos de parámetros, ofreciendo **"fórmulas" o expresiones analíticas** [13, 99, 100]. Esto permite realizar **análisis estático comparativo** (cómo cambian las variables de equilibrio ante variaciones en los parámetros exógenos) para un número infinito de combinaciones de funciones, lo cual es una ventaja significativa sobre los resultados numéricos específicos [13, 98-101].

5. Red Conceptual Básica

La comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales sigue una secuencia lógica de conceptos interconectados:

- **Conceptos Fundamentales:**
    - **Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL)**: Conjunto de ecuaciones con incógnitas elevadas a la primera potencia y no multiplicadas entre sí [2, 4, 7, 9].
    - **Representación Matricial ($Ax = b$)**: Herramienta compacta para expresar un SEL, con A (matriz de coeficientes), x (vector de incógnitas) y b (vector de términos independientes) [8, 21, 22, 27].

- **Matriz Ampliada (A^* o $A|b$)**: A con el vector b adjunto [7, 27].
- **Rango de una Matriz ($Rang(M)$)**: Número máximo de filas o columnas linealmente independientes [7, 30].

- **Axiomas/Postulados Implícitos:**
  - **Linealidad**: Las relaciones entre variables son lineales [102].
  - **Consistencia**: Las ecuaciones deben poder ser satisfechas simultáneamente para que exista solución.
  - **Independencia Lineal**: Las ecuaciones funcionalmente independientes son clave para soluciones únicas [103].

- **Relaciones entre Conceptos y Clasificación (Teorema de Rouché-Fröbenius) [24, 36, 37]:**
  - **Compatibilidad**: $Rang(A) = Rang(A^*)$ *(el sistema tiene solución)* [37].
  - **Incompatibilidad (SI)**: $Rang(A) < Rang(A^*)$ *(no tiene solución)* [37, 48, 58].
  - **Tipos de Sistemas Compatibles**:
    - **Sistema Compatible Determinado (SCD)**: $Rang(A) = Rang(A^*) =$ n.º incógnitas *(solución única)* [34, 36, 48].
    - **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)**: $Rang(A) = Rang(A^*) <$ n.º incógnitas *(infinitas soluciones)* [34, 57, 58].
  - **Sistemas Homogéneos ($Ax = 0$)**: Caso especial que **siempre es compatible** ($Rang(A) = Rang(A^*)$) y siempre incluye la **solución trivial** ($x = 0$) [70, 71, 74, 75].
    - Si $Rang(A) =$ n.º incógnitas: SCD (única solución: la trivial) [70, 78].
    - Si $Rang(A) <$ n.º incógnitas: SCI (infinitas soluciones, incluyendo la trivial) [78, 79].

- **Métodos de Resolución:**
  - **Eliminación de Gauss/Gauss-Jordan**: Método universal para transformar a forma escalonada [31, 67, 82].
  - **Regla de Cramer**: Aplica determinantes para sistemas cuadrados no singulares ($|A| \neq 0$) [8, 67, 82].
  - **Método de la Matriz Inversa**: Calcula $x = A^{-1}b$ para sistemas cuadrados no singulares [57, 67, 82].

- **Utilidades Principales:**
  - **Clasificación** de sistemas sin resolverlos (Rouché-Fröbenius) [8, 37].
  - **Determinación de soluciones** (únicas, infinitas) [31, 43, 47].
  - **Modelado de relaciones** económicas, de ingeniería, etc. [1, 14, 15].
  - **Análisis estático comparativo** en economía (soluciones paramétricas) [13, 98, 99].

- **Interpretación geométrica**: Intersección de líneas/planos [50, 52].

- **Secuencia Paso a Paso de Comprensión:**
  - 1. **Definir** el sistema y representarlo matricialmente [2, 8].
  - 2. **Clasificar** el sistema usando Rouché-Fröbenius para conocer el número de soluciones [8, 34].
  - 3. Si es compatible, **resolverlo** utilizando el método apropiado (Gauss, Cramer, Inversa) [81, 82].
  - 4. **Interpretar** las soluciones geométrica o económicamente [11, 50].
  - 5. **Identificar errores comunes** para asegurar la precisión [89, 98].

6. Conclusión Global

Los sistemas de ecuaciones lineales son una **piedra angular en el álgebra lineal y sus aplicaciones**, especialmente en la economía. Su representación matricial $Ax = b$ permite un manejo compacto y eficiente [22, 104]. La **clasificación** de estos sistemas (SCD, SCI, SI) se determina rigurosamente por el **Teorema de Rouché-Fröbenius**, comparando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada, lo que **permite predecir la existencia y unicidad de soluciones sin resolver el sistema** [34, 37, 104]. Métodos como Gauss, Cramer y la Matriz Inversa proporcionan las soluciones, siendo crucial entender sus condiciones de aplicabilidad y limitaciones para evitar errores comunes [82, 100]. La **interpretación geométrica** (intersección de líneas o planos) y la **utilidad de soluciones paramétricas** para el análisis económico son fundamentales para comprender su impacto en el modelado del mundo real [11, 100].

7. Preguntas Frecuentes (FAQs)

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales y cómo se clasifica?

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones donde las incógnitas aparecen solo a la primera potencia y no se multiplican entre sí [2, 4, 8]. Se clasifican según el número de soluciones que tienen: **Sistema Compatible Determinado (SCD)** con una única solución, **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)** con infinitas soluciones, y **Sistema Incompatible (SI)** sin ninguna solución [7, 8, 31, 34, 35, 46].

¿Cómo ayuda el Teorema de Rouché-Fröbenius a entender un sistema?

El Teorema de Rouché-Fröbenius permite **clasificar un sistema de ecuaciones lineales sin necesidad de resolverlo** [8, 24, 37]. Lo hace comparando el **rango de la matriz de coeficientes** (A) con el **rango de la matriz ampliada** (A^*) y el **número de incógnitas** (n) [8, 24, 36, 37]. Si $Rang(A) = Rang(A^*) = n$, es SCD; si $Rang(A) = Rang(A^*) < n$, es SCI; y si $Rang(A) < Rang(A^*)$, es SI [7, 36, 37, 46, 58].

¿Por qué los sistemas homogéneos siempre tienen solución?

Un sistema homogéneo es aquel en el que **todos sus términos independientes son cero** ($Ax = 0$) [58, 71, 74]. Siempre son compatibles (tienen solución) porque al formar la matriz ampliada, solo se añade una columna de ceros, lo que **no altera el rango de la matriz de coeficientes**, por lo que $Rang(A) = Rang(A^*)$ siempre se cumple [71, 74-76]. Además, siempre tienen al menos la **solución trivial**, donde todas las incógnitas son cero, ya que sustituir cero en cada ecuación siempre resulta en $0 = 0$ [8, 74, 76, 78].

¿Cuándo puedo aplicar la Regla de Cramer o el método de la matriz inversa?

Ambos métodos, la Regla de Cramer y el método de la matriz inversa, solo son aplicables a **sistemas cuadrados** (mismo número de ecuaciones que de incógnitas) cuya **matriz de coeficientes (A) sea no singular** [8, 29, 67, 82]. Esto significa que el **determinante de la matriz de coeficientes ($|A|$) debe ser distinto de cero** [8, 29, 67, 81, 82, 89]. Si $|A| = 0$, estos métodos no pueden usarse, ya que la matriz no tendría inversa o llevaría a una división por cero [8, 66, 89].

¿Cuál es la interpretación geométrica de las soluciones de un sistema lineal?

La interpretación geométrica permite visualizar las soluciones:

- Para un sistema de **dos ecuaciones con dos incógnitas**, cada ecuación es una línea recta en el plano [50-52]. Una **solución única (SCD)** significa que las líneas se **intersecan en un solo punto** [50-52, 54]. **Infinitas soluciones (SCI)** implican que las líneas son **coincidentes** (la misma línea) [50-52, 56]. **Ninguna solución (SI)** significa que las líneas son **paralelas y distintas** [50-52, 64].
- Para un sistema de **tres ecuaciones con tres incógnitas**, cada ecuación representa un plano en el espacio [12, 50, 52]. Una solución única es la intersección de los tres planos en un solo punto [50, 52]. Infinitas soluciones ocurren si los planos se intersecan a lo largo de una línea o son el mismo plano [50, 52]. Ninguna solución se da cuando los planos no tienen una intersección común [50, 52].